

BAC

محمد صابور

الأعداد المركبة

100 تمرين تطبيقي



محمد صا بور

الأعداد المركبة

(البرنامج الجديد)

100تمرين تطبيقي

شعبة : علوم تجـريبــية
شعبة : ريــاضيــات
شعبة : تقني رياضي

إهداءٌ لابُدّ منه ...

إلى الأخ " سرحات ".
لا تترُكْ تمريناً في هذا الكُتيّب دونَ حَلْحلَتِه!
رجائي لكَ بالتَّوفيق الكثير..

أيّوب.

ayoubsoft2011@hotmail.fr

رقم الإيداع القانوني : 2007 -3375

ردمك : 4- 1864 - 0 - 9947 - 978 : *ISBN*

طبع بمطبعة ع - بن - برج الكيفان -
الجزائر

المقدمـــــة

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله رب العالمين و الصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .
أما بعد ، خير ما أبدأ به في مقدمة هذا الكتيب هو كلام الله و حديث رسوله الكريم . إذ يقول الله تعالى في محكم تنزيله " قل هل يستوي الذين يعلمون والذين لا يعلمون"
ويقول الرسول صلى الله عليه وسلم :
" العلم فريضة على كل مسلم "

تواصل السلسلة المعروفة بـ :"البكالوريا بين يديك" صدورها إذ تقدم لكم أبنائي الطلبة كتيب في البرنامج الجديد عنوانه "الأعداد المركبة"
يحتوي هذا الكتيب على100 تمرين تطبيقي متنوعة منها المحلولة حلا مفصلا وأخرى مرفقة بالنتائج ليقيم بها الطالب معلوماته وتمارين مقترحة للحل .
إن معظم التمارين الموجودة هي" نموذج بكالوريا"
وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق ،
كما أرجو من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني بملاحظاتهم البناءة لتحسين محتوى هذا الكتيب .

الأستاذ : محمد صابور

الإهداء

إلى والدي الكريمين .

إلى رجال التعليم المخلصين في واجبهم

إلى أبنائي الطلبة متمنيا لهم النجاح في

شهادة البكالوريا .

أهدي هذا الكتيب المتواضع .

الأستاذ : محمد صابور

الأعداد المركبة

- الشكل الجبري:

$z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ عددان مركبان .

$z=0$ معناه ($x=0$ و $y=0$)

$z=z'$ معناه ($x=x'$ و $y=y'$)

$$z+z'=(x+x')+(y+y')i$$

$$z\times z'=(xx'-yy')+(xy'+yx')i$$

$\bar{z}=x-iy$ ، $z+\bar{z}=2x$ ،

$z-\bar{z}=2yi$ ، $z.\bar{z}=x^2+y^2$.

z حقيقي معناه تخيلي z معدوم يكافئ $z=\bar{z}$

z تخيلي معناه حقيقي z معدوم يكافئ $z+\bar{z}=0$

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ ، $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$ ، $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

-التمثيل الهندسي لعدد مركب :

$z=x+iy$ عدد مركب غير معدوم . النقطة $M(x;y)$ تسمى صورة العدد المركب z . العدد المركب z يسمى لاحقة M ونكتب $M(z)$. الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو صورة العدد المركب z .

- طويلة عدد مركب :

z عدد مركب حيث $z = x + iy$. نسمي طويلة z العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{x^2 + y^2}$ ، نرمز لطويلة z ب: $|z|$

. $|z| = \sqrt{x^2 + y^x}$

خــــواص:

$|z.z'| = |z|.|z'|$ ، $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ، $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ،

$|z^n| = |z|^n$ ، $|z + z'| \le |z| + |z'|$.

-عمدة عدد مركب غير معدوم :

تعريف :

z عدد مركب غير معدوم ، M صورته . نسمي عمدة العدد المركب z كل قيس للزاوية $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ ورمزه $\arg z$.

خــــواص:

$\arg z.z' \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$ ، $\arg\frac{1}{z} \equiv -\arg[2\pi]$

$\arg z^n \equiv n \times \arg z[2\pi]$ ، $\arg\frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$

$\arg\bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$ ، $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$.

- الشكل المثلثي لعدد مركب :

كل عدد مركب z طويلته r وعمدته θ يكتب على الشكل : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ تسمى هذه الكتابة بالشكل المثلثي للعدد المركب z .

الإنتقال من الشكل الجبري $z = x + iy$ للعدد المركب إلى الشكل المثلثي يتم بمعرفة الطويلة r و العمدة θ .

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و المساوتين :

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ و $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ تعيينان العدد θ.

- الترميز: $e^{i\theta}$

نصطلح أن نرمز للعدد المركب $z = \cos\theta + i\sin\theta$ بـ:

$z = e^{i\theta}$. من المساوتين : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

و $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ نستنتج أن :

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

هاتين العلاقتين تسميان بقوانين "*Euler*" وتستعمل خاصة في تحويل العبارات المثلثية إلى عبارات خطية .



تمارين محلولة

تمرين01

أحسب مايلي: 1) $(1+3i)(2-5i)$

2) $(1+3i)(-2+i)-(-3+i)(1+i)$

3) $(2-3i)^2-i(1+3i)$

الحـــل

1) $(1+3i)(2-5i)=2-5i+6i+15=\boxed{17+i}$

2) $(1+3i)(-2+i)-(-3+i)(1+i)=$

$(-2+i-6i-3)-(-3-3i+i-1)=$

$(-5-5i)-(-4-2i)=-5-5i+4+2i=\boxed{-1-3i}$

3) $(2-3i)^2-i(1+3i)=(4-12i-9)-i+3$

$=\boxed{-2-13i}$

تمرين02

باستعمال الجداءات الشهيرة ، احسب ما يلي :

1) $(1+i)^3$. 2) $(2-3i)(2+3i)$. 3) $(2-i)^3$.

4) $i(1+2i)^2-(-1+i)^2$.

الحـــل

1) $(1+i)^3=1^3+3i+3i^2+i^3$

$=1+3i-3-i=\boxed{-2+2i}$

(2 $$(2-3i)(2+3i)=2^2-(3i)^2$$
$$=4-9i^2=4+9=\boxed{13}$$

(3 $$(2-i)^3=2^3-3(2)^2i+3(2)(i)^2-i^3$$
$$=8-12i-6+i=\boxed{2-11i}$$

(4 $$i(1+2i)^2-(-1+i)^2=$$
$$i(1+4i-4)-(1-2i-1)=i(-3+4i)+2i$$
$$=\boxed{-4-i}$$

تمرين03

اكتب العبارات الآتية على شكل جداء عاملين :

$L=4(2+i)^2+9$ ، $L_1=(1+2i)^3+8i$ ، $L_2=(3+2i)^2+(1+i)^2$.

الحل

$$L=4(2+i)^2+9=\left[2(2+i)\right]^2-(3i)^2$$
$$=\left[2(2+i)-3i\right]\left[2(2+i)+3i\right]$$
$$=\boxed{(4-i)(4+5i)}$$

$L_1=(1+2i)^3+8i=(1+2i)^3-(2i)^3$ ، نعلم أن :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ومنه :

$$L_1=(1+2i-2i)\left[(1+2i)^2+2i(1+2i)+(2i)^2\right]$$
$$=1\times(1+4i-4+2i-4-4)=\boxed{(-11+6i)}$$
$$L_2=(3+2i)^2+(1+i)^2=(3+2i)^2-i^2(1+i)^2$$
$$=(3+2i)^2-\left[i(1+i)\right]^2=(3+2i)^2-(-1+i)^2$$
$$=\left[(3+2i)-(-1+i)\right]\left[(3+2i)+(-1+i)\right]$$
$$=\boxed{(4+i)(2+3i)}$$

تمرين04

1- أ) احسب i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8 .

ب) استنتج حساب : $i^n\ (n\in\mathbb{N})$.

2- احسب : $(1+i)^2$ ، $(1+i)^{2002}$.

الحل

1- أ) $i^4=i^2\times i^2=(-1)(-1)=+1$

$i^5=i^4\times i=(+1)i=i$ ، $i^6=i^4\times i^2=(+1)(-1)=-1$

$i^7=i^6\times i=(-1)i=-i$ ، $i^8=i^4\times i^4=+1$

ب)نستنتج من الدراسة السابقة أنه إذا كان : $n=4k\ (k\in\mathbb{N})$

فإن: $i^n=1$ و إذا كان : $n=4k+1\ (k\in\mathbb{N})$ فإن : $i^n=i$

و إذا كان : $n=4k+2\ (k\in\mathbb{N})$ فإن : $i^n=-1$.

و إذا كان : $n = 4k+3\left(k \in \mathbb{N}\right)$ فإن : $i^n = -i$.

2) حساب : $(1+i)^2$ ، $(1+i)^{2002}$.

$(1+i)^2 = 2i$.

$$(1+i)^{2002} = \left[(1+i)^2\right]^{1001} = (2i)^{1001}$$

$$= 2^{1001} \times i^{1001} = \boxed{2^{1001} i}$$

(لأن $1001 = 4\times 250 + 1$ من الشكل $4k+1$) .

تمرين05

اكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $i(1+i)^2 - (1-2i)^2$.

2) $\frac{3-i}{(1+i)^2}$ ، $\frac{-1+3i}{1-2i}$ ، $i^3 \times \frac{1-i}{1+i}$.

الحل

1) $$i(1+i)^2 - (1-2i)^2 = i(2i) - (-3-4i)$$

$$= \boxed{1+4i}$$

2) $$\frac{3-i}{(1+i)^2} = \frac{3-i}{2i} = \frac{(3-i)(-i)}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$$

$$\frac{-1+3i}{1-2i} = \frac{(-1+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-7+i}{5} = \boxed{\frac{-7}{5} + \frac{1}{5}i}$$

$$i^3 \times \frac{1-i}{1+i} = -i \times \frac{1-i}{1+i} = \frac{-1-i}{1+i} = -\frac{1+i}{1+i} = \boxed{-1}$$

تمرين06

أكتب على الشكل الجبري.

1) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{2+i}{1+i}$. 2) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-i}$. 3) $(1+i)^{32} - \frac{5i}{1+2i}$

الحل

1) $$\frac{1+i}{1-i} + \frac{2+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 + (2+i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}$$

2) $$\frac{1}{1+\sqrt{2}-i} = \frac{1+\sqrt{2}+i}{\left(1+\sqrt{2}-i\right)\left(1+\sqrt{2}+i\right)}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}+i}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 1} = \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} + \frac{1}{4+2\sqrt{2}}i}$$

3) $$(1+i)^{32} - \frac{5i}{1+2i} = \left[(1+i)^2\right]^{16} - \frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= (2i)^{16} - \frac{10+5i}{5} = 2^{16} \times \left(i^4\right)^4 - (2+i)$$

$$= \boxed{\left(2^{16} - 2\right) - i}$$

تمرين07

α عدد مركب حيث : $\alpha = x+iy$.

نضع $L=(1-2i)\alpha+1+3i$. 1) عين α لكي يكون $L=0$.

2) أ - عين مرافق L ($\overline{L}$) . ب- استنتج مجموعة النقاط M ذات اللاحقة α التي من أجلها يكون $L=\overline{L}$.

الحل

1) تعيين α لكي $L=0$:

$$L=(1-2i)\alpha+1+3i=(1-2i)(x+iy)+1+3i$$

$$=(x+2y+1)+i(-2x+y+3)$$

$L=0$ يكافئ $\begin{cases}x+2y+1=0\\-2x+y+3=0\end{cases}$ ومنه $(x;y)=(1;-1)$

إذن $\boxed{\alpha=1-i}$

2)- أ) تعيين مرافق L ($\overline{L}$) .

$$\overline{L}=(x+2y+1)-i(-2x+y+3)$$

ب) تعيين مجموعة النقاط M ذات اللاحقة α :

$L=\overline{L}$ يكافئ $(x+2y+1)-i(-2x+y+3)=(x+2y+1)+i(-2x+y+3)$

ومنه: $2i(-2x+y+3)=0$ ومنه : $-2x+y+3=0$

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هو المستقيم (D) ذو المعادلة:

$-2x+y+3=0$.

تمرين08

نعتبر العدد المركب $L=i\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)$ حيث $z=x+iy$.

1) عين بطريقتين مختلفتين $\overline{L}$.

2) أحسب $L+\overline{L}$ ثم استنتج مجموعة النقاط $M(z)$ من أجلها يكون L تخيليا صرفا .

الحل

1) تعيين L بطريقتين مختلفتين :

ط1 :

$$\overline{L}=\overline{i\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)}=\overline{i}\times\frac{\overline{z-2i}}{\overline{z+i}}=-i\times\frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}-i}$$

$$=\frac{-i(x-iy)+2}{x-iy-i}=\frac{(2-y)-ix}{x-(y+1)i}$$

$$=\frac{[(2-y)-ix][x+(y+1)i]}{[x-(y+1)i][x+(y+1)i]}$$

$$=\frac{3x}{x^2+(y+1)^2}-\frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2}i$$

ط2 :

$$L=i\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)=\frac{iz+2}{z+i}=\frac{i(x+iy)+2}{x+iy+i}$$

$$=\frac{(2-y)+ix}{x+i(y+1)}=\frac{[(2-y)+ix][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}$$

$$= \frac{3x}{x^2+(y+1)^2} + \frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2} i$$

ومنه : $$\overline{L} = \frac{3x}{x^2+(y+1)^2} - \frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2} i$$

2) حساب $L+\overline{L}$ واستنتاج مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا .

$$L+\overline{L} = \frac{6x}{x^2+(y+1)^2} .$$

نعلم أن L تخيليا صرفا معناه : $L+\overline{L}=0$.

$L+\overline{L}=0$ يكافئ $\frac{6x}{x^2+(y+1)^2}=0$ ومنه :

($x=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$).

إذن مجموعة النقاط $M(z)$ المطلوبة هي المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور التراتيب) باستثناء النقطة $(0;-1)$.

تمرين09

نعتبر العدد المركب $L=\frac{iz-(1+i)}{z-2i}$ حيث : $z=x+iy$.

1) عين مجموعة النقاط M ذات ا للاحقة z من أجلها يكون L حقيقيا .

2) عين مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا .

الحل

لنكتب L على الشكل الجبري:

$$L=\frac{iz-(1+i)}{z-2i}=\frac{i(x+iy)-(1+i)}{x+iy-2i}$$

$$=\frac{(-y-1)+i(x-1)}{x+i(y-2)}$$

$$=\frac{[(-y-1)+i(x-1)][x-i(y+2)]}{[x+i(y-2)][x-i(y-2)]}$$

$$=\frac{-3x-y+2}{x^2+(y-2)^2}+\frac{x^2+y^2-x-y-2}{x^2+(y-2)^2}i$$

1) تعيين مجموعة النقاط $M(z)$ من أجلها يكون L حقيقيا.

L حقيقي يعني تخيلي L معدوما ومنه :

$\left(\frac{x^2+y^2-x-y-2}{x^2+(y-2)^2}=0\right.$ و $\left((x;y)\neq(0;2)\right)$ ومنه :

$\left(x^2+y^2-x-y-2=0\right.$ و $\left((x;y)\neq(0;2)\right)$ ومنه :

$\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0\right.$ و

$\left((x;y)\neq(0;2)\right)$ ومنه:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2} \text{ و } \left((x;y)\neq(0;2)\right)$$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ المطلوبة هي الدائرة (C) التي مركزها $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{\frac{5}{2}}$ باستثناء النقطة $(0;2)$

2) تعيين مجموعة النقاط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا.

L تخيلي يعني حقيقي L معدوما ومنه :

$\left(\frac{-3x-y+2}{x^2+(y-2)^2}\right)=0$ مع $\left((x;y)\neq(0;2)\right)$ ومنه :

$\left(-3x-y+2=0\right.$ مع $\left.(x;y)\neq(0;2)\right)$.

مجموعة النقط $M(z)$ المطلوبة هي المستقيم (D) ذو المعادلة :

$\boxed{-3x-y+2=0}$ ، باستثناء النقطة $(0;2)$.

تمرين10

ليكن L العدد المركب المعرف بـ : $L=\frac{z-4-2i}{z+2+i}$.

1) - أ) عين $\overline{L}$ (مرافق L)

- ب) استنتج مجموعة النقط $M(z)$ ذات اللاحقة z بحيث يكون L حقيقيا.

2) عين مجموعة النقط $M(z)$ من أجلها تكون $\arg(L)\equiv\pi[2\pi]$.

الحل

1)- أ) تعيين مرافق L .

$$\overline{L}=\overline{\left(\frac{z-4-2i}{z+2+i}\right)}=\frac{\overline{z}-4+2i}{\overline{z}+2-i}=\frac{x-iy-4+2i}{x-iy+2-i}$$

$$=\frac{(x-4)-i(y-2)}{(x+2)-i(y+1)}$$

$$=\frac{\left[(x-4)-i(y-2)\right]\left[(x+2)+i(y+1)\right]}{\left[(x+2)-i(y+1)\right]\left[(x+2)+i(y+1)\right]}$$

$$=\frac{x^2+y^2-2x-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2}+\frac{3x-6y}{(x+2)^2+(y+1)^2}i$$

ب) استنتاج مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون L حقيقيا.

لدينا :

$$\overline{L}=\frac{x^2+y^2-2x-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2}+\frac{3x-6y}{(x+2)^2+(y+1)^2}i$$

و نعلم أن : $\overline{\overline{L}}=L$ ومنه فإن :

$$L=\frac{x^2+y^2-2x-y-10}{(x+2)^2+(y+1)^2}-\frac{3x-6y}{(x+2)^2+(y+1)^2}i$$

L حقيقي يعني تخيلي L معدوما ومنه :

($3x-6y=0$ و $(x;y)\neq(-2;-1)$) ومنه :

($x-2y=0$ و $(x;y)\neq(-2;-1)$) .

مجموعة النقط هي المستقيم $(D): x-2y=0$ باستثناء النقطة $(-2;-1)$.

2) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من أجلها تكون $\arg(L)\equiv\pi[2\pi]$.

$\arg(L)\equiv\pi[2\pi]$ يكافئ(تخيلي L $=0$ و حقيقي L <0)

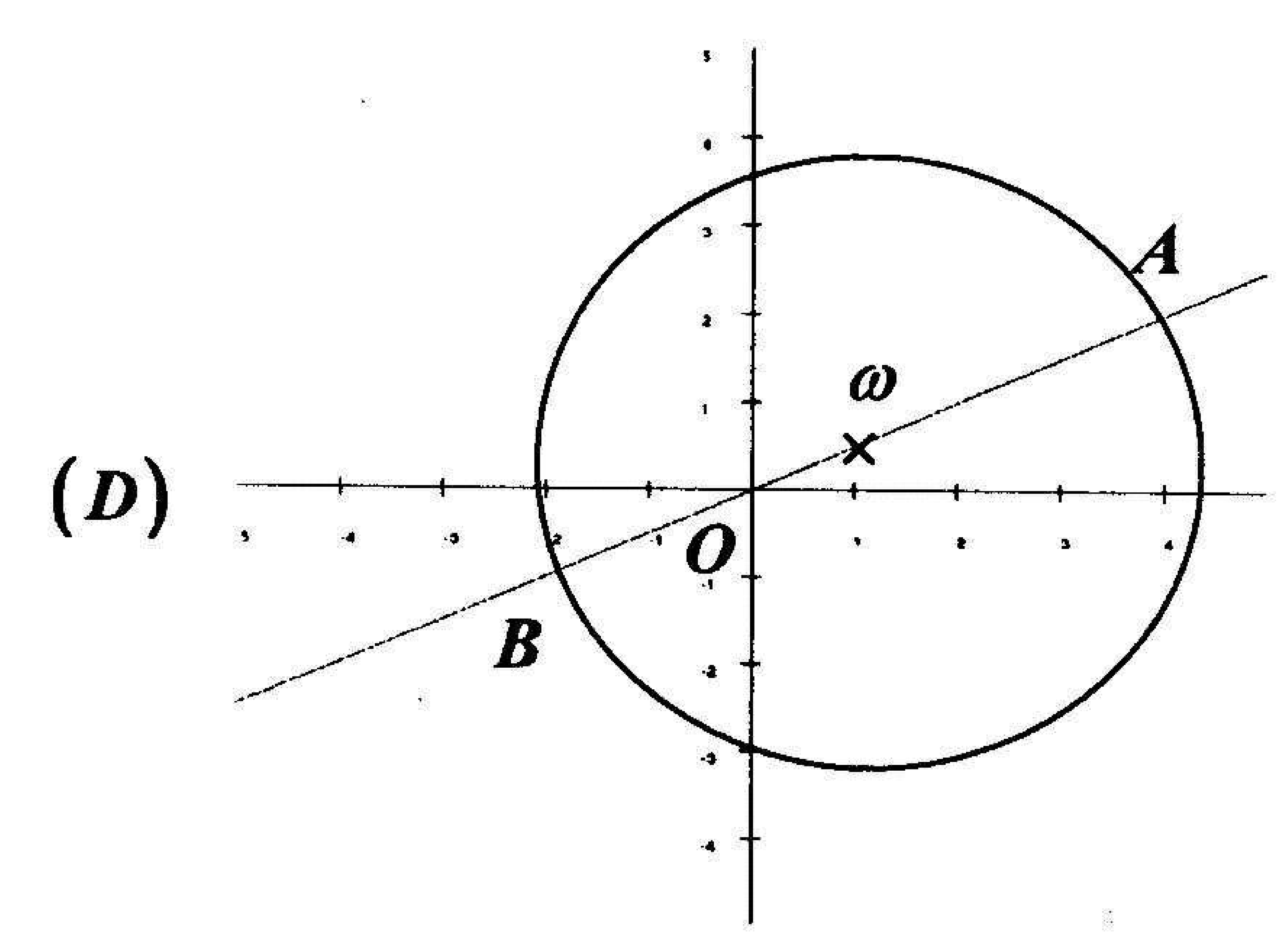
يكافئ[$3x-6y=0$ و $x^2+y^2-2x-y-10<0$

و $(x;y)\neq(-2;-1)$] ومنه :

$$\left[x-2y=0 \text{ و } (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{45}{4}<0\right.$$

و $\left.(x;y)\neq(-2;-1)\right]$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ تنتمي إلى المستقيم (D) ذو المعادلة $x-2y=0$ و تنتمي إلى القرص الذي مركزه $\omega\left(1;\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $\frac{\sqrt{45}}{2}$ و هي ممثلة بالقطر $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .



تمرين 11

في مستوي الأعداد المركبة المزود بمعلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A ، M ، C ذات اللواحق على الترتيب $1+i$ ، z ، iz حيث : $z=x+iy$.

1) عين مجموعة النقط $M(z)$ لكي يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A .

2) عين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $|z-1-i|=|iz-z|$

الحـل

1) تعيين مجموعة النقط $M(z)$ لكي يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A .

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$:

$$Z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=iz-1-i$$
$$=i(x+iy)-1-i=(-1-y)+i(x-1)$$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-y-1\\x-1\end{pmatrix}$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM}$:

$$Z_{\overrightarrow{AM}} = Z_M - Z_A = z-1-i = (x-1)+i(y-1)$$

ومنه : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$.

يكون المثلث ACM قائم الزاوية في A إذا كان $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=0$.

ومنه $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=0$:

ومنه $(x-1)(-y-1)+(y-1)(x-1)=0$:

$(x-1)(-y-1+y-1)=0$ ومنه $-2(x-1)=0$

ومنه $x=1$.

إذ ن مجموعة النقط المطلوبة هي المستقيم ذو المعادلة $x=1$.

2) تعيين مجموعة النقط $M(z)$:

$|z-1-i|=|iz-z|$ يكافئ

$$|(x-1)+i(y-1)|=|(-y-x)+i(x-y)|$$

ومنه $(x-1)^2+(y-1)^2=(-x-y)^2+(x-y)^2$

ومنه : $x^2+y^2+2x+2y-2=0$ ومنه :

$(x+1)^2+(y+1)^2-4=0$ ومنه:

$(x+1)^2+(y+1)^2=4$. إ ذ ن مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي مركزها $\omega(-1;-1)$ ونصف قطرها 2 .

تمرين 12

أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي :

$$z_1=-2+2i\ ;\ z_2=5-5\sqrt{3}i\ ;\ z_3=\sqrt{6}+\sqrt{2}i\ ;\ z_4=-2\sqrt{3}-6i$$

الحـل

$|z_1|=2\sqrt{2}$ ، إذا كانت θ_1 هي عمدة z_1 فإن :

$\cos\theta_1=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه θ_1 تنتمي إلى الربع الثاني ومنه : $\theta_1\equiv\pi-\frac{\pi}{4}\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

إذن $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

$|z_2|=10$ ، إذا كانت θ_2 هي عمدة z_2 فإن : $\cos\theta_2=\frac{1}{2}$

و $\sin\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه θ_2 تنتمي إلى الربع الرابع ومنه :

$\theta_2\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_2=10\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$.

$|z_3|=2\sqrt{2}$ ، إذا كانت θ_3 هي عمدة z_3 فإن : $\cos\theta_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$

و $\sin\theta_3=\frac{1}{2}$ ومنه θ_3 تنتمي إلى الربع الأول ومنه:

إذن $\theta_3 \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ، $z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

$|z_4| = 4\sqrt{3}$ ، إذا كانت θ_4 هي عمدة z_4 فإن : $\cos\theta_4 = -\frac{1}{2}$

و $\sin\theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه θ_4 تنتمي إلى الربع الثالث ومنه :

$$\theta_4 \equiv \pi + \frac{\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$$

إذن $z_4 = 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

تمرين 13

1) اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي :

$L = (-1+i)(\sqrt{3}-i)$ ، $L_1 = (1+i)^3(-2i)$ ،

$L_2 = (\sqrt{3}+i)^3\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ،

$L_3 = i^{2003}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)^2$.

2) أكتب الأعداد L ، L_1 ، L_2 على الشكل الأسي .

الحل

1) * $|L| = |-1+i|\times|\sqrt{3}-i| = 2\sqrt{2}$

$\arg L \equiv \arg(-1+i) + \arg(\sqrt{3}-i)$

$$\equiv \frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]$$

ومنه : $L = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

* $|L_1| = |1+i|^3 \times |-2i| = \left(\sqrt{2}\right)^3 \times 2 = 4\sqrt{2}$

$\arg L_1 \equiv \arg(1+i)^3 + \arg(-2i)$

$$\equiv 3\arg(1+i) + \arg(-2i) \equiv \frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

ومنه : $L_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

* $|L_2| = |\sqrt{3}+i|^3 \times \left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = 2^3 \times 1 = 8$

$\arg L_2 \equiv \arg\left(\sqrt{3}+i\right)^3 + \arg\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$$\equiv 3\arg\left(\sqrt{3}+i\right) + 2\arg\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\equiv 3\times\frac{\pi}{6} + 2\times\frac{2\pi}{3} \equiv \frac{11\pi}{6}[2\pi]$$

ومنه : $L_2 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

$$|L_3| = |i|^{2003} \times \left|\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right|^2 = |i|^{2003} \times \left(\sqrt{8}\right)^2 = 1\times 8 = 8 \; *$$

$$\arg L_3 \equiv \arg\left(i^{2003}\right) + \arg\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)^2$$

$$\equiv 2003\times\arg(i) + 2\arg\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)$$

$$\equiv 2003\times\frac{\pi}{2} + 2\times\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\equiv 1001\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \equiv 1002\pi + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

ومنه : $L_3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2) $L = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ، $L_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $L_2 = 8e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

تمرين 14

اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي .

$$z_1 = \left(\frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}\right)^4 \text{ ، } z_2 = \frac{(1-i)^3}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2} \text{ ، } z_3 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}+i}\right)^{30}$$

الحل

$$z_1 = \left(\frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}\right)^4 = \left(\frac{\left(5+11\sqrt{3}i\right)\left(7+4\sqrt{3}i\right)}{\left(7-4\sqrt{3}i\right)\left(7+4\sqrt{3}i\right)}\right)^4$$

$z_1 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^4$ ومنه : $|z_1| = \left|-1+\sqrt{3}i\right|^4 = 2^4 = 16$

$$\arg(z_1) \equiv \arg\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4 \equiv 4\arg\left(-1+\sqrt{3}i\right)$$

$$\equiv 4\times\frac{2\pi}{3} \equiv 2\pi + \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

ومنه : $z_1 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

$$|z_2| = \frac{|1-i|^3}{\left|1+i\sqrt{3}\right|^2} = \frac{\sqrt{2}^3}{2^2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(z_2) \equiv \arg(1-i)^3 - \arg\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$$

$$\equiv 3\times\arg(1-i) - 2\times\arg\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

$$\equiv -\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} \equiv -\frac{17\pi}{12}[2\pi]$$

و منه: $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-17\pi}{12}\right)\right)$.

$$|z_3| = \frac{|i|^{30}}{\left|\sqrt{3}+i\right|^{30}} = \frac{1}{2^{30}}$$

$$\arg(z_3) \equiv \arg\left(i^{30}\right) - \arg\left(\sqrt{3}+i\right)^{30}$$

$$\equiv 30\times\arg(i) - 30\times\arg\left(\sqrt{3}+i\right)$$

$$\equiv \frac{30\pi}{2}-\frac{30\pi}{6}\equiv 15\pi-5\pi\,[2\pi]$$

$$\equiv 10\pi \equiv 0\,[2\pi]$$

ومنه : $z_3=\frac{1}{20^{30}}\left(\cos 0+i\sin 0\right)$

تمرين 15

اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل المثلثي .

$z_1=\sin\theta-i\cos\theta$ ، $z_2=-\sin\theta+i\cos\theta$ ،

$z_3=1+\cos\theta+i\sin\theta$ حيث: $\theta\in[0;2\pi]$

الحل

$$z_1=\sin\theta-i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

ومنه : $\boxed{z_1=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$.

$$z_2=-\sin\theta+i\cos\theta=\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$z_3=1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

- إذا كان $\theta\in]0;\pi[$ فإن $\frac{\theta}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ إذن $\cos\frac{\theta}{2}>0$

ومنه : $\boxed{z_3=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$.

- إذا كان $\theta\in]\pi;2\pi[$ فإن $\frac{\theta}{2}\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ إذن $\cos\frac{\theta}{2}<0$

ومنه : $\boxed{z_3=-2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]}$.

تمرين 16

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $2iz+2-i=(1+i)z+1$

2) $(1-2iz)(1+i)^2-(1+i)z=0$

3) $\frac{iz}{1+i}+\frac{z-1}{1-i}=0$.

الحل

1) $2iz+2-i=(1+i)z+1$ ومنه :

$2iz-(1+i)z=-1+i$ ومنه :

ومنه $(-1+i)z=-1+i$ ومنه $z=\dfrac{-1+i}{-1+i}=\boxed{1}$

2) $(1-2iz)(1+i)^2-(1+i)z=0$ ومنه :

ومنه $(1+i)^2-(1+i)^2.2iz-(1+i)z=0$:

$2i+4z-(1+i)z=0$ ومنه: $2i+(4-1-i)z=0$

ومنه : $(3-i)z=-2i$ ومنه $z=\dfrac{-2i}{3-i}=\boxed{\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i}$.

3) $\dfrac{iz}{1+i}+\dfrac{z-1}{1-i}=0$ ومنه $\dfrac{(1-i)iz+(1+i)(z-1)}{(1+i)(1-i)}=0$

ومنه: $\dfrac{iz+z+z-1+iz-i}{2}=0$ ومنه :

$\dfrac{(2+2i)z-(1+i)}{2}=0$ ومنه : $(2+2i)z=1+i$

ومنه : $z=\dfrac{1+i}{2(1+i)}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

تمرين 17

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $(1+i)z-(2+3i)\bar{z}-1+9i=0$

2) $(z+2i)(\bar{z}+1-3i)=14+2i$

3) $z\bar{z}+(z-\bar{z})-2i-5=0$

الحـــل

نضع $z=x+iy$ ومنه $\bar{z}=x-iy$.

1) $(1+i)z-(2+3i)\bar{z}-1+9i=0$ ومنه :

$(1+i)(x+iy)-(2+3i)(x-iy)-1+9i=0$ ومنه :

$(-x-4y-1)+i(-2x+3y+9)=0$ ومنه :

$\begin{cases}-x-4y-1=0\\-2x+3y+9=0\end{cases}$ ومنه $(x=3;y=-1)$ ومنه :

$z=\boxed{3-i}$

2) $(z+2i)(\bar{z}+1-3i)=14+2i$ ومنه :

$z\bar{z}+(1-3i)z+2i\bar{z}+2i(1-3i)=14+2i$ ومنه :

$x^2+y^2+(1-3i)(x+iy)+2i(x-iy)+6+2i=14+2i$

ومنه :

$x^2+y^2+x+3y+(y-3x)i+2y+2xi-8=0$ ومنه

$(x^2+y^2+x+5y-8)+i(-x+y)=0$ يكافئ

$\begin{cases}x^2+y^2+x+5y-8=0\\-x+y=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2x^2+6x-8=0\\x=y\end{cases}$

ومنه $x_2=1$ أو $\begin{cases}x_1=-4\\x=y\end{cases}$ ومنه حلول المعادلة هي:

$z_1=\boxed{-4-4i}$ و $z_2=\boxed{1+i}$

3) $z\bar{z}+\left(z-\bar{z}\right)-2i-5=0$ يكافئ

ومنه $\left(x^2+y^2-5\right)+2i\left(y-1\right)=0$ ومنه $\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\2\left(y-1\right)=0\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\y=1\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

ومنه حلول المعادلة هي: $z_1=\boxed{2+i}$ و $z_2=\boxed{-2+i}$

تمرين 18

احسب الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية:

$$z_1=-3+4i \text{ ، } z_2=8-6i \text{ ، } z_3=4\left(\frac{11+2i}{1+2i}\right)$$

الحل

- إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب z_1 فإن $\alpha^2=z_1$.

$$\alpha^2=z_1 \text{ يكافئ } \begin{cases}x^2-y^2=-3 & ....(1)\\x^2+y^2=|z_1|=5 & ....(2)\\xy=2 & ....(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=1$ ومنه : ($x_1=1$ أو $x_2=-1$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=2$ و $y_2=-2$ ومنه :

$\alpha_1=\boxed{1+2i}$ و $\alpha_2=\boxed{-1-2i}$

- إذا كان $\beta=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب z_2 فإن $\beta^2=z_1$.

$$\beta^2=z_2 \text{ يكافئ } \begin{cases}x^2-y^2=8 & ....(1)\\x^2+y^2=|z_1|=10 & ....(2)\\xy=-3 & ....(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=9$ ومنه : ($x_1=-3$ أو $x_2=+3$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=1$ و $y_2=-1$ ومنه :

$\beta_1=\boxed{-3+i}$ و $\beta_2=\boxed{3-i}$

$$z_3=4\left(\frac{11+2i}{1+2i}\right)=4\frac{\left(11+2i\right)\left(1-2i\right)}{5}=4\left(3-4i\right)$$

- إذا كان $\delta=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب z_3 فإن $\delta^2=z_3$

$$\delta^2=z_3 \text{ يكافئ } \begin{cases}x^2-y^2=12 & ....(1)\\x^2+y^2=|z_3|=20 & ....(2)\\xy=-8 & ....(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=16$ ومنه : ($x_1=-4$ أو $x_2=4$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=2$ و $y_2=-2$ ومنه :

$\delta_1=\boxed{-4+2i}$ و $\delta_2=\boxed{4-2i}$

تمرين 19

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية ذات المجهول z :

1) . $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$

2) . $z^2-(3-2i)z+5-i=0$

3) . $z^2-(1+i\sqrt{3})z+i\sqrt{3}=0$

4) . $(1+i)z^2-2(1+4i)z-(3-11i)=0$

الحــل

1) $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$

$$\Delta=(1-3i)^2+8(1+i)=2i=(1+i)^2$$

ومنه : $z_1=\dfrac{-(1-3i)-(1+i)}{2}=\boxed{-1+i}$

$$z_2=\frac{-(1-3i)+(1+i)}{2}=\boxed{2i}$$

2) $z^2+(3-2i)z+5-i=0$

$$\Delta=(3-2i)^2-4(5-i)=-15-8i$$

- إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2=\Delta$.

$\alpha^2=\Delta$ يكافئ $\begin{cases} x^2-y^2=-15 & ....(1) \\ x^2+y^2=17 & ....(2) \\ xy=-4 & ....(3) \end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=1$ ومنه : ($x_1=1$ أو $x_2=-1$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=-4$ و $y_2=4$ ومنه :

$\alpha_1=1-4i$ و $\alpha_2=-1+4i$

ومنه حلول المعادلة هي : $z_1=\dfrac{(3-2i)+(1-4i)}{2}=\boxed{2-3i}$

$$z_2=\frac{(3-2i)-(1-4i)}{2}=\boxed{1+i}$$

3) $z^2-(1+i\sqrt{3})z+i\sqrt{3}=0$

$$\Delta=(1+i\sqrt{3})^2-4i\sqrt{3}=-2-2i\sqrt{3}$$

- إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2=\Delta$.

$\alpha^2=\Delta$ يكافئ $\begin{cases} x^2-y^2=-2 & ....(1) \\ x^2+y^2=4 & ....(2) \\ xy=-\sqrt{3} & ....(3) \end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد $x^2=1$ ومنه : ($x_1=1$ أو $x_2=-1$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=-\sqrt{3}$ و $y_2=+\sqrt{3}$ ومنه :

$\alpha_1=1-\sqrt{3}i$ و $\alpha_2=-1+\sqrt{3}i$

ومنه حلول المعادلة هي : $z_1=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)}{2}=\boxed{1}$

$$z_2 = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)-\left(1-\sqrt{3}i\right)}{2} = \boxed{\sqrt{3}i}$$

4) $(1+i)z^2 - 2(1+4i)z - (3-11i) = 0$

$$\Delta' = (1+4i)^2 + (1+i)(3-11i) = -1 = i^2$$

ومنه حلول المعدلة هي :

$$z_1 = \frac{(1+4i)+i}{(1+i)} = \frac{1+5i}{1+i} = \frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \boxed{3+2i}$$

$$z_2 = \frac{(1+4i)-i}{(1+i)} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \boxed{2+i}$$

تمرين20

1) عين العددين الحقيقيين α و β حيث: $(\alpha+\beta i)^2 = 48-14i$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+(1-3i)z+(-14+2i)=0$

نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلول المعادلة حيث: $\mathrm{Re}(z_2)<0$.

3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط

C، A، B ذات اللواحق على الترتيب : $-3-i$ ، z_1 ، z_2 .

- برهن أن المثلث CAB قائم الزاوية في C.

الحل

1) تعيين العددين α و β .

$$(\alpha+\beta i)^2 = 48-14i \text{ يكافئ } \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = 48 & ....(1) \\ \alpha^2+\beta^2 = 50 & ....(2) \\ \alpha\beta = -7 & ....(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد $\alpha^2 = 49$ ومنه : ($\alpha_1 = 7$ أو $\alpha_2 = -7$)

بالتعويض في (3)نجد : $\beta_1 = -1$ و $\beta_2 = 1$ ومنه :

$$(\alpha;\beta) \in \{(7;-1),(-7;1)\}$$

2) حلول المعادلة: $z^2+(1-3i)z+(-14+2i)=0$

$$\Delta = (1-3i)^2 - 4(-14+2i) = -8-6i+56-8i$$

$$= 48-14i = (7-i)^2 \quad \text{(من السؤال الأول)}$$

ومنه :

$$z_1 = \frac{-(1-3i)-(7-i)}{2} = \boxed{-4+2i}$$

$$z_2 = \frac{-(1-3i)+(7-i)}{2} = \boxed{3+i}$$

3)البرهان على أن المثلث CAB قائم الزاوية في C.

$$Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = (-3-i)-(3+i) = -6-2i$$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$.

$$Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_C - Z_B = (-3-i)-(-4+2i) = 1-3i$$

ومنه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

لدينا : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=(-6)(+1)+(-2)(-3)=0$

إذن $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ ومنه المثلث CAB قائم الزاوية في C .

تمرين21

α عدد مركب غير معدوم .

1) تحقق أن $\alpha^2+2(\alpha+1)i+2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد يطلب تعيينه .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$z^2+2(\alpha+2+2i)z+2\alpha(1+i)+6i=0$.

3) عين α لكي يكون جذري المعادلة متعاكسان .

الحـــل

1) التحقق بأن $\alpha^2+2(\alpha+1)i+2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد.

$$[(\alpha+1)+i]^2=(\alpha+1)^2+2(\alpha+1)i-1$$
$$=\alpha^2+2\alpha+2(\alpha+1)i$$

إذن $\alpha^2+2(\alpha+1)i+2\alpha$ هو مربع لثنائي الحد $(\alpha+1)+i$

2) حل المعادلة: $z^2+2(\alpha+2+2i)z+2\alpha(1+i)+6i=0$

$$\Delta'=(\alpha+2+2i)^2-2\alpha(1+i)-6i$$
$$=(\alpha+2)^2+2(\alpha+2)\times2i-4-2\alpha-2\alpha i-6i$$
$$=(\alpha^2+4\alpha+4)+4\alpha i+8i-4-2\alpha-2\alpha i-6i$$

$$=\alpha^2+2\alpha+2\alpha i+2i=\alpha^2+2\alpha+2(\alpha+1)i$$
$$=[(\alpha+1)+i]^2$$

ومنه :

$$z_1=-(\alpha+2+2i)+(\alpha+1)+i=\boxed{-1-i}$$
$$z_2=-(\alpha+2+2i)-(\alpha+1)-i=\boxed{(-2\alpha-3)-3i}$$

3) تعيين α لكي يكون جذري المعادلة z_1 و z_2 متعاكسان .

z_1 و z_2 متعاكسان يعني $z_1+z_2=0$ ومنه :

$-2\alpha-4-4i=0$ ومنه : $\alpha+2+2i=0$ ومنه

$\alpha=\boxed{-2-2i}$

تمرين22

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+\sin\alpha)z+\frac{1}{2}i\sin\alpha=0$

حيث: $\alpha\in]0;\pi[$. 2) أكتب الجذرين z' و z'' على الشكل المثلثي .

3) عين α لكي يكون $z'=z''$

الحـــل

1) حل المعادلة : $z^2-(1+\sin\alpha)z+\frac{1}{2}i\sin\alpha=0$

$$\Delta=(1+i\sin\alpha)^2-4\times\frac{1}{2}i\sin\alpha$$
$$=(1-\sin^2\alpha)+2i\sin\alpha-2i\sin\alpha=\cos^2\alpha$$

$$z'=\frac{(1+i\sin\alpha)-\cos\alpha}{2}=\frac{(1-\cos\alpha)+i\sin\alpha}{2}$$

ومنه :

$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\times\cos\frac{\alpha}{2}}{2}=$$

إذن : $z'=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$$z''=\frac{(1+i\sin\alpha)+\cos\alpha}{2}=\frac{(1+\cos\alpha)+i\sin\alpha}{2}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\times\cos\frac{\alpha}{2}}{2}$$

إذن : $z''=\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

2) كتابة z' و z'' على الشكل المثلثي .

$$z'=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

و بما أن $\frac{\alpha}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ ومنه

$$z'=\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$$

و بما أن $\frac{\alpha}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\cos\frac{\alpha}{2}>0$ ومنه :

$$z''=\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

3) تعيين α بحيث $z'=z''$

$z'=z''$ يكافئ $|z''|=|z'|$ و $\arg(z'')=\arg(z')+2K\pi$

يكافئ ($\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+2K\pi$)

ومنه : $\boxed{\alpha=\frac{\pi}{2}+2K\pi}$

تمرين23

α عدد مركب معلوم طويلته r و عمدته θ .

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2-\alpha(\alpha+i)z+i\alpha^3=0$$

2) أكتب z' و z'' جذري المعادلة على الشكل المثلثي .

3) نفرض $\alpha=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$. أ – احسب z'^{2000} و z''^{2000} .

ب – عين العدد الطبيعي n لكي يكون $(z')^n$ و $(z'')^n$ حقيقيان .

الحل

1) حل المعادلة: $z^2-\alpha(\alpha+i)z+i\alpha^3=0$

$$\Delta = \alpha^2(\alpha+i)^2 - 4i\alpha^3 = \alpha^2\left[(\alpha+i)^2-4i\alpha\right]$$

$$= \alpha^2\left(\alpha^2-2i\alpha+i^2\right) = \alpha^2(\alpha-i)^2$$

$$z' = \frac{\alpha(\alpha+i)+\alpha(\alpha-i)}{2} = \alpha^2$$

$$z' = \frac{\alpha(\alpha+i)-\alpha(\alpha-i)}{2} = \alpha i$$

2) كتابة z' و z'' على الشكل المثلثي .

لدينا $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ومنه :

$z' = \alpha^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ ،

$$z'' = \alpha i = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$$

3) أ - حساب z'^{2000} و z''^{2000} .

$$z'^{2000} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2000\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 2000\right)$$

$$= \cos(1000\pi)+i\sin(1000\pi) = 1$$

(لأن $\sin K\pi = 0$ و $\cos K\pi = 1$ إذا كان K زوجيا)

$$z''^{2000} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\times 2000\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\times 2000\right)$$

$$= \cos(1500\pi)+i\sin(1500\pi) = 1$$

ب - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $(z')^n$ و $(z'')^n$ حقيقيان.

لدينا : $z' = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ، $z'' = \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$

ومنه :

$$(z')^n = \cos\left(n\times\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(z'')^n = \cos\left(n\times\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(n\times\frac{3\pi}{4}\right)$$

$z'^n \in \mathbb{R}$ و $z''^n \in \mathbb{R}$ يكافئ

$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و $\sin\left(n\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ ومنه :

($\frac{n\pi}{2} = K\pi$ و $n\frac{3\pi}{4} = K'\pi$ حيث $(K;K')\in\mathbb{N}^2$

ومنه : ($n=2K$ و $3n=4K'$) ومنه :

($n=2K$ و $n=4K''$) ومنه n من مضاعفات 4.

<u>تمرين24</u>

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0$.

1) بين أن هذه المعادلة تقبل جذرا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة . ليكن z_1 ، z_2 الجذرين الآخرين للمعادلة حيث $|z_1|<|z_2|$.

3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقط A ، B ، C صور الأعداد المركبة z_0 ، z_1 ، z_2 على الترتيب.

- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

الحـــل

1) تعيين الجذر الحقيقي z_0 للمعادلة :

z_0 جذر للمعادلة يعني $z_0^3 - iz_0^2 + (1-i)z_0 - 2 + 2i = 0$

ومنه : $(z_0^3 + z_0 - 2) + i(-z_0^2 - z_0 + 2) = 0$ ومنه :

$$\begin{cases} z_0^3 + z_0 - 2 = 0 & .....(1) \\ -z_0^2 - z_0 + 2 = 0 & .....(2) \end{cases}$$

المعادلة (2) تقبل حلين $z_0' = -2$ ، $z_0'' = 1$ حيث الجذر $z_0'' = 1$ يحقق المعادلة (1) فهو مقبول و الجذر الثاني $z_0' = -2$ لا يحقق المعادلة (1) فهو مرفوض و منه $z_0 = 1$.

2) حل المعادلة : $z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0 ....*$

$$z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = (z-1)(z^2 + az + c)$$

$$= z^3 + (a-1)z^2 + (c-a)z - c$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a - 1 = -i \\ c - a = 1 - i \\ -c = -2 + 2i \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a = 1 - i \\ c = 2 - 2i \end{cases}$

* يكافئ $(z-1)\left[z^2 + (1-i)z + 2 - 2i\right] = 0$ ومنه :

($z = 1$ أو ** $z^2 + (1-i)z + 2 - 2i = 0.....$)

** معادلة من الدرجة الثانية مميزها Δ حيث :

$$\Delta = (1-i)^2 - 4(2-2i) = -8 + 6i$$

إذا كان $\alpha = x + iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2 = \Delta$.

$\alpha^2 = \Delta$ يكافئ $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & ....(1) \\ x^2 + y^2 = 10 & ....(2) \\ xy = 3 & ....(3) \end{cases}$ بجمع (1) و(2)

نجد $x^2 = 1$ ومنه : ($x_1 = 1$ أو $x_2 = -1$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1 = 3$ و $y_2 = -3$ ومنه :

$\alpha_1 = 1 + 3i$ و $\alpha_2 = -1 - 3i$ ومنه :

$$z_1 = \frac{-(1-i) - (1+3i)}{2} = \boxed{-1-i}$$

$$z_2 = \frac{-(1-i) + (1+3i)}{2} = \boxed{2i}$$

ومنه حلول المعادلة هي : $z_0 = 1$ ، $z_1 = -1 - i$ ، $z_2 = 2i$

3) طبيعة المثلث ABC :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_1 - z_0 = -2 - i$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_2 - z_0 = -1 + 2i$ ومنه : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ +2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-2)(-1) + (-1)(+2) = 0$$

إذن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ و منه المثلث ABC قائم الزاوية في A و متساوي الساقين.

تمرين25

ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$$P(z)=2z^3+2iz^2+\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}+3i$$

1) برهن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ ، نرمز بـ z_1 للجذر الذي جزؤه الحقيقي سالب و بـ z_2 للجذر الثالث .

3) أ – أكتب z_0 ، z_1 ، z_2 على الشكل المثلثي .

ب – احسب العدد المركب $L=\left(z_0\right)^{2000}+\left(z_1\right)^{1992}+\left(z_2\right)^{1998}$

الحل

1)تعيين الجذر التخيلي z_0 :

إذا كان $z_0=\alpha i$ جذرا تخيليا صرفا للمعادلة $P(z)=0$ فإن:

$P(\alpha i)=0$ ومنه :

$$2(\alpha i)^3+2i(\alpha i)^2+\left(1+i\sqrt{3}\right)(\alpha i)+\sqrt{3}+3i=0$$

ومنه $-2\alpha^3 i-2\alpha^2 i+\alpha i-\alpha\sqrt{3}+\sqrt{3}+3i=0$ ومنه :

$\sqrt{3}(1-\alpha)+i\left(-2\alpha^3-2\alpha^2+\alpha+3\right)=0$ يكافئ

$\begin{cases}\sqrt{3}(1-\alpha)=0\\ -2\alpha^3-2\alpha^2+\alpha+3=0\end{cases}$ ومنه $\alpha=1$ ومنه : $z_0=i$

2) حل المعادلة $P(z)=0$:

$$P(z)=(z-i)\left(2z^2+az+c\right)$$
$$=2z^3+(a-2i)z^2+(c-ai)z-ci$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a-2i=2i\\ c-ai=1+i\sqrt{3}\\ -ci=\sqrt{3}+3i\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=4i\\ c=-3+\sqrt{3}i\end{cases}$

$P(z)=0$ ومنه $(z-i)\left(2z^2+4iz-3+\sqrt{3}i\right)=0$ ومنه

($z=i$ أو $2z^2+4iz-3+\sqrt{3}i=0$)

$$\Delta'=(2i)^2-2\left(-3+\sqrt{3}i\right)=2-2\sqrt{3}i$$

إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ' فإن $\alpha^2=\Delta'$

$\alpha^2=\Delta'$ يكافئ $\begin{cases}x^2-y^2=2 \;....(1)\\ x^2+y^2=4 \;....(2)\\ xy=-\sqrt{3} \;.....(3)\end{cases}$ بجمع (1) و(2) نجد

$x^2=3$ ومنه : ($x_1=\sqrt{3}$ أو $x_2=-\sqrt{3}$)

بالتعويض في (3)نجد : $y_1=-1$ و $y_2=1$ ومنه :

$\alpha_1=\sqrt{3}-i$ و $\alpha_2=-\sqrt{3}+i$ ومنه :

$$z_1=\frac{-2i-\left(\sqrt{3}-i\right)}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_2=\frac{-2i+\left(\sqrt{3}-i\right)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

إذن حلول المعادلة $P(z)=0$ هي :

$z_0=i$ ، $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

3) كتابة z_0 ، z_1 ، z_2 على الشكل المثلثي .

$$z_0=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

لدينا $|z_1|=1$ وإذا كانت θ_1 هي عمدة z_1 فإن $\cos\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و $\sin\theta_1=-\frac{1}{2}$ ومنه : $\theta_1\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]$ و بالتالي:

$z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$.

لدينا $|z_2|=\sqrt{3}$ وإذا كانت θ_2 هي عمدة z_2 فإن $\cos\theta_2=\frac{1}{2}$

و $\sin\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه: $\theta_2\equiv\frac{-\pi}{3}[2\pi]$ و التالي:

$z_2=\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$.

ب- حساب العدد $L=(z_0)^{2000}+(z_1)^{1992}+(z_2)^{1998}$

$$L=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2000\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 2000\right)$$
$$+\cos\left(\frac{7\pi}{6}\times 1992\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\times 1992\right)$$
$$+3^{999}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\times 1998\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\times 1998\right)\right]$$
$$L=\cos(1000\pi)+i\sin(1000\pi)$$
$$+\cos(2324\pi)+i\sin(2324\pi)$$
$$+3^{999}\left[\cos(-666\pi)+i\sin(-666\pi)\right]$$
$$L=(1+0)+(1+0)+3^{999}(1+0)=\boxed{2+3^{999}}$$

تمرين26

عين الجذرر من الرتبة الرابعة للعدد المركب : $z=8\sqrt{2}(1+i)$

الحـــل

إذا كان . $z=8\sqrt{2}(1+i)=16\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ هو جذر من الرتبة الرابعة للعدد z فإن :

$\alpha^4=z$ يكافئ

$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ يكافئ

($r^4=16$ و $4\theta=\frac{\pi}{4}+2K\pi$) ومنه : $r=2$ و

$\theta=\frac{\pi}{16}+K\frac{\pi}{2}$ مع $K\in\{0,1,2,3\}$ ومنه الجذور من الرتبة الرابعة للعدد z هي: $\alpha_0=2\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$ ،

$$\alpha_1=2\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right) ،$$

$$\alpha_2=2\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right) ،$$

$$\alpha_3=2\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right) .$$

<u>تمرين27</u>

1) حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة :

$$\begin{cases}(1+i)z'-(1+2i)z''=2+i\\(1-i)z'+(2+i)z''=1+2i\end{cases}$$

2) احسب $L=\left(\frac{z'}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(z''\right)^{2002}$

<u>الحل</u>

1) حل الجملة :

$$\begin{cases}(1+i)z'-(1+2i)z''=2+i & ....(1)\\(1-i)z'+(2+i)z''=1+2i & ....(2)\end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في $-(1-i)$ و المعادلة (2) في $(1+i)$

نجد:

$$\begin{cases}-2z'+(3+i)z''=-3+i & ....(3)\\2z'+(1+3i)z''=-1+3i & ....(4)\end{cases}$$

بجمع المعادلتين (3) و (4) نجد: $4(1+i)z''=-4(1-i)$

ومنه : $z''=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\boxed{i}$

بتعويض z'' بـ i في المعادلة (1) نجد : $(1+i)z'=2i$ ومنه :

$$z'=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i(1-i)}{2}=\boxed{1+i}.$$

2) حساب العدد $L=\left(\frac{z'}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(z''\right)^{2002}$

$$z'=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) ،$$

$$z''=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

$$L=\cos\left(\frac{\pi}{4}\times2000\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\times2000\right)+$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\times2002\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\times2002\right)$$

$$L = \cos 500\pi + i\sin 500\pi + \cos 1001\pi + i\sin 1001\pi$$
$$= (1+0) + (-1+0) = 0$$

تمرين28

1) أ – اكتب $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ على الشكل المثلثي .

ب – عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_0{}^n$ حقيقيا .

2) ليكن z_1 العدد المركب المعرف كما يلي :

$$z_0 \times z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

- أكتب z_1 على الشكل المثلثي ثم على الشكل الجبري .

3) استنتج قيمة $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

الحـــل.

1) كتابة z_0 على الشكل المثلثي و تعيين n ليكون $z_0{}^n$ حقيقيا .

$|z_0| = 2$ إذا كان θ هي عمدة z_0 فإن $\cos\theta = \frac{1}{2}$ و $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

إذن $z_0{}^n = 2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$

$z_0{}^n \in \mathbb{R}$ معناه تخيلي $z_0{}^n$ معدوم ومنه : $\sin n\frac{\pi}{3} = 0$

ومنه : $n\frac{\pi}{3} = K\pi$ ومنه : $n = 3K \ (K \in \mathbb{N})$

2) كتابة z_1 على الشكل المثلثي ثم على الشكل الجبري .

لدينا : $z_0 \times z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ومنه :

$$z_1 = \frac{2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{z_0}$$ ومنه :

$$z_1 = \frac{2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$ ومنه :

$$z_1 = \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

ومنه : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

3) استنتاج قيمة $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

لدينا : $z_0 \times z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ومنه :

$$(1 + i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$ ومنه

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ ومنه :

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$ ومنه :

$\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

تمرين29

1)احسب الجذور التكعيبية للعدد $L=-2+2i$

2) أ – احسب $(1+i)^3$. ب – عين الجذور التكعيبية للعدد 1 على الشكل الجبري.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3+2(1-i)=0$.

4) استنتج قيمة $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

الحـل

1)حساب الجذور التكعيبية للعدد $L=-2+2i$

$$L=-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

إذا كان $\beta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ جذرا تكعيبيا للعدد L فإن $\beta^3=L$.

$\beta^3=L$ يكافئ

$r^3(cs3\theta+i\sin3\theta)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ يكافئ

($r^3=2\sqrt{2}$ و $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{2K\pi}{3}$ حيث $K\in\{0,1,2\}$ ومنه :

($r=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

و $\theta=\frac{3\pi+8K\pi}{12}$ حيث $K\in\{0,1,2\}$) ومنه :

$\beta_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ،

$\beta_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ ،

$\beta_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

2) أ – حساب $(1+i)^3$

$$(1+i)^3=(1+i)(1+i)^2=(1+i)\times 2i=-2+2i$$

ب – تعيين الجذور التكعيبية للعدد 1 على الشكل الجبري.

$1=\cos 0+i\sin 0$ ، $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ جذرا تكعيبيا للعدد 1 .

$\alpha^3=1$ ومنه $r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\cos 0+i\sin 0$

يكافئ ($r^3=1$ و $\theta=\frac{2K\pi}{3}$ حيث $K\in\{0,1,2\}$) ومنه :

$$\alpha_0=1$$

$$\alpha_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ،}$$

$$\alpha_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=$$

$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن الجذور التكعيبية للعدد 1 هي:

$\alpha_0=1$ ، $\alpha_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\alpha_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) حل المعادلة $z^3+2(1-i)=0$.

$z^3+2(1-i)=0$ ومنه : $z^3=-2+2i=(1+i)^3$ ومنه

ومنه : $\left(\frac{z}{1+i}\right)^3=1$ إذن $\frac{z}{1+i}$ جذرا تكعيبيا للعدد 1. ومنه :

$\frac{z}{1+i}=1$ أو $\frac{z}{1+i}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $\frac{z}{1+i}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{z}{1+i}=1$ ومنه : $z=1+i$.

$\frac{z}{1+i}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه :

$$z=(1+i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

$\frac{z}{1+i}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه :

$$z=(1+i)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

4) استنتاج قيمة $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

لدينا $z^3=-2+2i=L$ ومنه z جذرا تكعيبيا للعدد L ،إذن حلول هذه المعادلة z_0 ، z_1 ، z_2 هي الجذور التكعيبية للعدد L

لدينا $z_0=1+i$ ، $z_1=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ ،

$$z_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \text{ .}$$

و نعلم أن الجذور التكعيبية للعدد L على الشكل المثلثي هي:

$$\beta_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ ،}$$

$$\beta_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{2}+i\sin\frac{11\pi}{2}\right) \text{ ،}$$

$$\beta_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{2}+i\sin\frac{19\pi}{2}\right) \text{ .}$$

نعلم أن $\cos\frac{11\pi}{12}<0$ و $\sin\frac{11\pi}{12}>0$ ومنه :

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

ومنه : $\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ، $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

إذن : $\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ، $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

تمرين30

α عدد مركب طويلته r و عمدته $\theta\in\left]-\pi;+\pi\right[$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-\alpha(1+3i)-2\alpha^2(1-i)=0$

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي المعادلة حيث $|z_2|>|z_1|$

2) أ - أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ب – حدد r و θ بحيث يكون $z_1=z_2^2$.

3) نفرض أن $\theta=\frac{\pi}{4}$ و $r=\sqrt{2}$. أ – عين العدد الطبيعي n لكي يكون z_1^n تخيليا صرفا . ب – احسب z_2^{2000} .

الحل

1) حل المعادلة : $z^2-\alpha(1+3i)-2\alpha^2(1-i)=0$

$$\Delta=\alpha^2(1+3i)^2+8\alpha^2(1-i)$$

$$=\alpha^2(-8+6i)+8\alpha^2-8\alpha^2 i$$

$$=-2\alpha^2 i=\alpha^2(-2i)=\alpha^2(1-i)^2$$

ومنه : $z_1=\frac{\alpha(1+3i)+\alpha(1-i)}{2}=\alpha+\alpha i=\alpha(1+i)$

$$z_2=\frac{\alpha(1+3i)-\alpha(1-i)}{2}=2\alpha i$$

2) أ – كتابة z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

$$|z_1|=|\alpha(1+i)|=|\alpha||1+i|=r\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1)\equiv\arg[\alpha(1+i)]\equiv\arg(\alpha)+\arg(1+i)$$

$$\equiv\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$$

ومنه : $z_1=r\sqrt{2}\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$|z_2|=|2\alpha i|=|\alpha||2i|=2r$$

$$\arg(z_2)\equiv\arg[2\alpha i]\equiv\arg(\alpha)+\arg(2i)$$

$$\equiv\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$$

ومنه : $z_2=2r\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

ب –تعيين r و θ بحيث يكون $z_1=z_2^2$.

$z_1 = z_2^2$ يكافئ ($|z_2^2| = |z_1|$ و $\arg(z_2^2) = \arg(z_1) + 2K\pi$)

يكافئ ($4r^2 = r\sqrt{2}$ و $2\arg(z_2) = \arg(z_1) + 2K\pi$) يكافئ

($r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2K\pi$) ومنه :

($r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2K\pi$)

و بما أن $\theta \in]-\pi, +\pi[$ فإن $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\theta = -\frac{3\pi}{4}$.

3) أ – تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون z_1^n تخيليا صرفا .

إذا كان $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن : $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

و $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

و لدينا : $z_1^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

z_1^n تخيليا صرفا يعني حقيقي z_1^n معدوم ومنه : $\cos\frac{n\pi}{2} = 0$

ومنه : $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + K\pi = \frac{\pi}{2}(2K+1)$ ومنه :

$n = 2k+1 \ (K \in \mathbb{N})$.

إذن مجموعة الأعداد الطبيعية n لكي يكون z_1^n تخيليا صرفا هي :

مجموعة الأعداد الفردية $n = 2k+1 \ (K \in \mathbb{N})$.

ب – حساب z_2^{2000}.

$$z_2^{2000} = \left(2\sqrt{2}\right)^{2000}\left(\cos 2000\times\frac{3\pi}{4} + i\sin 2000\times\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\sqrt{8}\right)^{2000}\left(\cos 1500\pi + i\sin 1500\pi\right)$$

$$= 8^{1000}\times(1+0) = \boxed{8^{1000}}$$

تمرين 31

1) عين العدد الحقيقي α حيث: $(2+\alpha i)^2 = 3+4i$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2(1-2i)z + 3(3+4i) = 0$

نرمز لحلي المعادلة بـ z_1 و z_2 حيث $\mathrm{Re}(z_1) < 0$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_1 ، z_2 ، $5-5i$.

3) أ – برهن أن المثلث ABC قائم الزاوية في B .

ب – عين لاحقة D لكي يكون الرباعي $ABCD$ مستطيلا .

4) ليكن العدد المركب $L = \frac{z-z_2}{z-z_1}$. عين مجموعة النقط $M(z)$ لكي يكون L تخيليا صرفا.

الحل

1) تعيين العدد الحقيقي α حيث : $(2+\alpha i)^2 = 3+4i$.

$(2+\alpha i)^2 = 3+4i$ يكافئ $(4-\alpha^2) + 4\alpha i = 3+4i$ ومنه :

($4-\alpha^2 = 3$ و $4\alpha = 4$) ومنه : $\alpha = 1$.

2) حل المعادلة $z^2-2(1-2i)z+3(3+4i)=0$.

$$\Delta'=(1-2i)^2-3(3+4i)=-12-16i=-4(3+4i)$$
$$=4i^2(2+i)^2=\left[2i(2+i)\right]^2=(-2+4i)^2$$

ومنه : $z_1=1-2i+(-2+4i)=-1+2i$

$z_2=1-2i-(-2+4i)=3-6i$

3) أ- البرهان بأن المثلث ABC قائم الزاوية في B .

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_2-z_1=4-8i$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$.

$z_{\overrightarrow{BC}}=(5-5i)-z_2=2+i$ ومنه : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4(2)+(-8)(1)=0$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$

فالمثلث ABC قائم الزاوية في B .

ب – تعيين لاحقة النقطة D .

$ABCD$ مستطيل معناه : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ يكافئ

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ يكافئ $z_2-z_1=z_C-z_D$ ومنه :

$z_D=z_C-z_2+z_1$ ومنه :

$z_D=(5-5i)-(3-6i)+(-1+2i)=1+3i$

4) تعيين مجموعة النقط $M(z)$.

$$L=\frac{z-z_2}{z-z_1}=\frac{(x+iy)-(3-6i)}{(x+iy)-(-1+2i)}=\frac{(x-3)+i(y+6)}{(x+1)+i(y-2)}$$
$$=\frac{\left[(x-3)+i(y+6)\right]\left[(x+1)-i(y-2)\right]}{\left[(x+1)+i(y-2)\right]\left[(x+1)-i(y-2)\right]}$$
$$=\frac{x^2+y^2-2x+4y-15}{(x+1)^2+(y-2)^2}+i\frac{8x+4y}{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

L تخيليا صرفا معناه حقيقي $L=0$ ومنه :

$x^2+y^2-2x+4y-15=0$ و $(x;y)\neq(-1;2)$ ومنه :

$(x-1)^2+(y+2)^2-1-4-15=0$ و

$(x;y)\neq(-1;2)$ ومنه : $(x-1)^2+(y+2)^2=20$

و $(x;y)\neq(-1;2)$. إذن مجموعة النقط M لكي يكون

L تخيليا صرفا هي الدائرة التي مركزها $\omega(1;-2)$ و نصف

قطرها $2\sqrt{5}$ باستثناء النقطة $(-1;2)$.

تمرين32

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(2-7i)z-13(1+i)=0$

نرمز لحلي المعادلة بـ z_1 و z_2 بحيث يكون الجزء الحقيقي لـ z_1

موجبا تماما .

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

A و B صورتا العددين المركبين z_1 و z_2 على الترتيب .

أ-عين المركز ω للتشابه S الذي نسبته 2 و زاويته $\frac{3\pi}{2}$ و الذي يحول النقطة A إلى النقطة B.

ب – عين لاحقة C صورة النقطة B بالتشابه S .

3) أ– عين لاحقة النقطة D مرجع الجملة

$\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

ب – ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ- عين المجموعة (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث :

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = K \ (K \in \mathbb{R})$.

الحـــل

1) حل المعادلة : $z^2 - (2-7i)z - 13(1+i) = 0$

$$\Delta = (2-7i)^2 + 52(1+i) = 7+24i$$

إذا كان $\alpha = x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ فإن $\alpha^2 = \Delta$.

$\alpha^2 = \Delta$ يكافئ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 & ...(1) \\ x^2 + y^2 = 25 & ...(2) \\ xy = 12 & ...(3) \end{cases}$ بجمع (1) و (2) نجد:

$x^2 = 16$ ومنه : ($x_1 = 4$ أو $x_2 = -4$)

بالتعويض في (3) نجد : $y_1 = 3$ ، $y_2 = -3$.

ومنه : $\alpha_1 = 4+3i$ ، $\alpha_2 = -4-3i$

ومنه حلول المعادلة هي : $z_1 = \frac{(2-7i)+(4+3i)}{2} = 3-2i$

$z_2 = \frac{(2-7i)-(4+3i)}{2} = -1-5i$.

2) أ – تعيين مركز التشابه S :

العبارة المركبة للتشابه S هي $z' = \alpha z + \beta$ حيث $(\alpha;\beta) \in \mathbb{C}^2$ و $|\alpha| \neq 1$.

لدينا : $\alpha = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$

و لدينا : $S(A) = B$ ومنه $z_2 = \alpha z_1 + \beta$ و منه: $\beta = z_2 - \alpha z_1$.

إذن $\beta = (-1-5i) + 2i(3-2i) = 3+i$ فيكون $z' = -2iz + 3 + i$: . و مركز التشابه S هي النقطة ω ذات اللاحقة $\frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{5} = 1-i$.

جـ - تعيين لاحقة النقطة C .

لدينا $S(B) = C$ و منه:

$$z_C = -2iz_2 + 3 + i$$
$$= -2i(-1-5i) + 3 + i = -7+3i$$

3) أ - تعيين لاحقة النقطة D .

$$z_D = \frac{z_1 - z_2 + z_C}{1-1+1} = (3-2i) - (-1-5i) - 7 + 3i$$
$$= -3+6i$$

ب – طبيعة الرباعي $ABCD$.

ومنه $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -4-3i$ ، $z_{\overrightarrow{AB}} = z_2 - z_1 = -4-3i$

فيكون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

($AB = DC$ و $(AB)//(DC)$) فالرباعي $ABCD$ فيه ضلعان متقابلان متقايسان و حاملاهما متوازيان فهو متوازي الأضلاع و بما أن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}$ فهو مستطيل .

جـ - تعيين المجموعة (γ) .

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = K$ ومنه :

$MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = K$.

$DA^2 = |z_1 - z_D|^2 = |6-8i|^2 = 100$ ،

$DB^2 = |z_2 - z_D|^2 = |2-11i|^2 = 125$ ،

$DC^2 = |z_C - z_D|^2 = |-4-3i|^2 = 25$.

$D^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = MD^2 + 100 - 125 + 25 = K$

ومنه : $MD^2 = K$.

إذا كان $K > 0$ فإن المجموعة (γ) هي دائرة مركزها D و نصف قطرها $R = \sqrt{K}$.

إذا كان $K < 0$ فإن المجموعة (γ) هي مجموعة خالية.

إذا كان $K = 0$ فإن المجموعة (γ) هي النقطة D .

تمرين33

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود :

$$P(z) = z^3 - 4(1+2i)z^2 + (-18+20i)z + 3(8+4i)$$

1) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$. نرمز لحلول المعادلة بـ : z_0 ، z_1 و z_2 حيث $|z_1| < |z_2|$.

في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2 .

3) أ – عين العدد الحقيقي λ لكي تقبل الجملة $\{(A;\lambda),(B;-1),(C;1)\}$ النقطة D ذات اللاحقة $-1+2i$ مرجعا .

ب – عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق :

$$-2MA^2 - MB^2 + MC^2 = K \quad (K \in \mathbb{R}) .$$

الحـــل

1)البرهان على أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 .

إذا كان : $z_0 = iy$ فإن : $P(iy) = 0$ ومنه :

$$-iy^3 + 4y^2(1+2i) + iy(-18+20i) + 3(8+4i) = 0$$

يكافئ

$$\begin{cases} -y^3 + 8y^2 - 18y + 12 = 0 \ldots(1) \\ 4y^2 - 20y + 24 = 0 \quad \ldots(2) \end{cases}$$

المعادلة (2) تقبل حلين $y_1 = 2$ أو $y_2 = 3$ حيث y_1 يحقق المعادلة (1) فهو الحل المقبول أما y_2 فهو مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة (1) و منه $z_0 = 2i$.

2) حل المعادلة $P(z)=0$.

$$P(z)=(z-2i)(z^2+az+c)$$
$$=z^3+(a-2i)z^2+(c-2ai)z-2ci$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a-2i=-4(1+2i) \\ c-2ai=-18+20i \\ -2ci=3(8+4i) \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} a=-4-6i \\ c=-6+12i \end{cases}$

$P(z)=0$ يكافئ

$$(z-2i)\left[z^2-(4+6i)z-6+12i\right]=0$$

ومنه : $z_0=2i$ أو $z^2-(4+6i)z-6+12i$

$$\Delta'=(2+3i)^2-(-6+12i)=(-5+12i)+6-12i=1$$

ومنه : $z_1=(2+3i)-1=1+3i$ ،

$z_2=(2+3i)+1=3+3i$.وبالتالي حلول

المعادلة $P(z)=0$ هي:

$z_0=2i$ ، $z_1=1+3i$ ، $z_2=3+3i$

3) أ – تعيين العدد الحقيقي λ .

لكي تقبل الجملة $\{(A;\lambda),(B;-1),(C;1)\}$ مرجعا يجب أن يكون $\lambda+(-1)+(+1)\neq 0$ ومنه: $\lambda\neq 0$.

تكون النقطة $D(1-2i)$ مرجعا لهذه الجملة إذا كان

$z_D=\dfrac{\lambda z_0-z_1+z_2}{\lambda}$ ومنه :

$-1+2i=\dfrac{2\lambda i-(1+3i)+3+3i}{\lambda}$ ومنه :

$\lambda(-1+2i)=2\lambda i+2$ ومنه $\lambda=-2$.

ب– تعيين مجموعة النقط $M(z)$

$-2MA^2-MB^2+MC^2=K$ ومنه :

$$-2MD^2-2DA^2-DB^2+DC^2=K$$

$DA^2=|z_0-z_D|^2=1$ ، $DB^2=|z_1-z_D|^2=|2+i|^2=5$ ،

$$DC^2=|z_2-z_D|^2=|4+i|^2=17$$

$-2MD^2-2-5+17=K$ ومنه :

$MD^2=\dfrac{10-K}{2}$.

إذا كان $K<10$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها D و نصف قطرها $R=\sqrt{\dfrac{10-K}{2}}$.

إذا كان $K=10$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة D .

إذا كان $K>10$ فإن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

تمرين34

نعتبر الأعداد المركبة : $z_1 = 1+i$ ، $z_2 = 2(-1+i)$ ، $z_3 = -3-i$.

1) أ – احسب z_1^{2002} .

ب – عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_2^n \in \mathbb{R}_+^*$.

2)نعتبر في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_1 ، z_2 ، z_3 .

أ - λ عدد حقيقي ، عين E مجموعة قيم λ لكي تقبل الجملة $\{(A;\lambda),(B;1),(C;1)\}$ النقطة G_λ مرجحا .

ب – عين مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda \in E$.

3) نعتبر الدوران R الذي يحول النقطة A إلى B و النقطة B إلى C .

أ – عين العناصر المميزة للدوران R .

ب – عين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R .

الحـــل

1) حساب z_1^{2002}.

ومنه : $z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z_1^{2002} = 2^{1001}\left[\cos\left(2002\times\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2002\times\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{1001}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+500\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+500\pi\right)\right]$$

$$= 2^{1001}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{1001}i$$

ب – تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_2^n \in \mathbb{R}_+^*$.

ومنه : $z_2 = 2(-1+i) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$z_2^n = \left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{3\pi}{4}\times n + i\sin\frac{3\pi}{4}\times n\right)$$

$z_2^n \in \mathbb{R}_+^*$ يكافئ $\begin{cases} \sin\frac{3\pi\times n}{4} = 0 \\ \cos\frac{3\pi\times n}{4} > 0 \end{cases}$ يكافئ

$\frac{3\pi\times n}{4} = 2K\pi$ ومنه $3n = 8K$ حيث $K \in \mathbb{N}$

(حسب نظرية غوس فإن8 تقسم n (أي n من مضاعفات 8)

.

2) أ – تعيين مجموعة قيم λ .

لكي تقبل الجملة $\{(A;\lambda),(B;1),(C;1)\}$ مرجحا يجب أن يكون

$\lambda+1+1 \neq 0$ أي $\lambda \neq -2$ ومنه $E = \mathbb{R}-\{-2\}$.

ب – تعيين مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda \in E$.

من أجل كل عدد λ حيث: $\lambda \in E$ فإن $z_{G_\lambda} = \dfrac{\lambda z_1 + z_2 + z_3}{\lambda+2}$

$$z_{G_\lambda} = \frac{\lambda-5}{\lambda+2} + i\frac{\lambda+1}{\lambda+2} = \left(1-\frac{7}{\lambda+2}\right) + i\left(1-\frac{1}{\lambda+2}\right)$$

ومنه : $G_\lambda\left(1-\frac{7}{\lambda+2};1-\frac{1}{\lambda+2}\right)$ فيكون

$$\begin{cases} x_G = 1-\frac{7}{\lambda+2} & ...(1) \\ y_G = 1-\frac{1}{\lambda+2} & ...(2) \end{cases}$$ بضرب المعادلة (2) في (-7) ثم

بجمع المعادلتين نجد: $x_G - 7y_G - 6 = 0$.

فتكون مجموعة النقط G_λ عندما $\lambda \in E$ هي المستقيم (D) ذو المعادلة : $x-7y-6=0$

3) أ – تعيين العناصر المميزة للدوران R .

نعلم أن عبارة الدوران R هي من الشكل $z'=\alpha z+\beta$ حيث : $(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}^2$ و $|\alpha|=1$.

لدينا : $\begin{cases} R(A)=B \\ R(B)=C \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z_2=\alpha z_1+\beta \\ z_3=\alpha z_2+\beta \end{cases}$ و منه :

$z_3-z_2=\alpha(z_2-z_1)$ ومنه : $\alpha=\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{-1-3i}{-3+i}$

ومنه: $\alpha=\frac{(-1-3i)(-3-i)}{10}=i$.

لدينا : $z_2=\alpha z_1+\beta$ ومنه $\beta=z_2-\alpha z_1=-1+i$

إذن عبارة الدوران R هي $z'=iz-1+i$.

العناصر المميزة للدوران R هي الزاوية : $\arg(i)=\frac{\pi}{2}$

و المركز النقطة ذات اللاحقة $-1 = -\frac{1-i}{1-i} = \frac{-1+i}{1-i}$.

ب – تعيين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A .

لدينا : $R(A)=A'$ ومنه :

$$z_{A'} = iz_A -1+i = i(1+i)-1+i$$
$$=-2+2i$$

تمرين35

نعتبر الأعداد المركبة : $-4i$ ، -2 ، $-2-2i$.

1)رتب هذه الأعداد المركبة لكي تشكل 3 حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $(1+i)$.

2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المتتالية (z_n) المعرفة بحدها الأول $z_0=-1-i$ و أساسها $(1+i)$

أ – احسب z_1 ، z_2 ، z_3 .   ب- احسب بدلالة n الحد العام z_n .

جـ - أكتب z_n على الشكل المثلثي ثم استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها $z_n\in\mathbb{R}$.

3) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=(-1-i)z+(4+2i)$.

أ- ما طبيعة التحويل S وما هي عناصره المميزة ؟

ب- برهن أن التحويل $T = S\circ S\circ S\circ S$ هو تحاكي يطلب تعيين عناصره.

الحل

1) ترتيب الأعداد المركبة $-4i$ ، -2 ، $-2-2i$ لكي تشكل ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية هندسية.

لدينا : $(-2-2i)^2 = 8i$ و $(-2)(-4i) = 8i$

و بما أن $(-2-2i)^2 = (-2)(-4i)$ (الوسط الهندسي) فإن الحد $-2-2i$ هو الحد الوسط ، و يكون الترتيب كما يلي :
-2 ، $-2-2i$ ، $-4i$. أو $-4i$ ، $-2-2i$ ، -2 . ويكون أساس المتتالية في الترتيب الأول : $\frac{-2-2i}{-2} = 1+i$ وهو المطلوب .

إذن ترتيب الحدود هو : -2 ، $-2-2i$ ، $-4i$.

2) أ – حساب z_1 ، z_2 ، z_3 :

$$z_1 = (1+i)z_0 = (1+i)(-1-i) = -2i$$
$$z_2 = (1+i)z_1 = (1+i)\times(-2i) = 2-2i$$
$$z_3 = (1+i)z_2 = (1+i)(2-2i) = 4$$

ب – حساب z_n بدلالة n:

$$z_n = z_0(1+i)^n = (-1-i)(1+i)^n$$

جـ - كتابة z_n على الشكل المثلثي ثم استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n.

$$|z_n| = |-1-i|\times|1+i|^n = \sqrt{2}\times(\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\arg(z_n) \equiv \arg(-1-i) + \arg(1+i)^n$$
$$\equiv \frac{5\pi}{4} + n\times\arg(1+i) \equiv \frac{5\pi}{4} + \frac{n\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}(5+n)[2\pi]$$

ومنه : $z_n = \sqrt{2^{n+1}}\left[\cos\frac{(5+n)\pi}{4} + i\sin\frac{(5+n)\pi}{4}\right]$.

$z_n \in \mathbb{R}$ يكافئ $\sin\frac{\pi}{4}(5+n) = 0$ ومنه : $\frac{\pi}{4}(5+n) = K\pi$

و منه : $5+n = 4K$ ومنه $n = 4K-5$ حيث: $K \in \mathbb{N}$ و $K \geq 2$.

3) أ – طبيعة التحويل S و عناصره المميزة.

لدينا $z' = (-1-i)z + (4+2i)$ و بما أن $|-1-i| = \sqrt{2}$

و $\arg(-1-i) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$ فالتحويل S هو تشابه نسبته $\sqrt{2}$

و زاويته $\frac{5\pi}{4}$ و مركزه النقطة ω ذات اللاحقة

$\frac{4+2i}{1-(-1-i)} = \frac{4+2i}{2+i} = 2$ ومنه : $\omega(2;0)$.

ب- البرهان على أن $T = S\circ S\circ S\circ S$ هو تحاكي يطلب تعيين عناصره.

نعلم أن تركيب n مرة التشابه S الذي مركزه ω و نسبته K و زاويته θ هو تشابه مركزه ω و نسبته K^n و زاويته $n\times\theta$.

فيكون $T = S\circ S\circ S\circ S$ هو تشابه مركزه ω و نسبته

$\left(\sqrt{2}\right)^4$ و زاويته $4\times\frac{5\pi}{4}=5\pi$.والتشابه الذي زاويته $K\pi$

يعتبر تحاكي. فالتحويل T هو تحاكي مركزه ω ونسبته $4=\left(\sqrt{2}\right)^4$

تمرين36

نعتبر العددين المركبين :

$$z=-8\left(\sqrt{3}-i\right) \quad \text{و} \quad L=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$$

1) أ – احسب طويلة وعمدة z .   ب – احسب z^{2002} .

جـ - عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z^n\in\mathbb{R}$.

2) أ – احسب L^2 .   ب – استنتج قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2+2\left(\sqrt{3}-2i\right)z-16\left(7-5\sqrt{3}i\right)=0$$

- تحقق أن $z=-8\left(\sqrt{3}-i\right)$ هو جذر للمعادلة ثم استنتج الجذر الآخر.

الحل

1) أ – حساب طويلة وعمدة z.

$|z|=\left|-8\left(\sqrt{3}-i\right)\right|=16$ ،

$$\arg(z)\equiv\arg\left[-8\left(\sqrt{3}-i\right)\right]\equiv\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

ب – حساب z^{2002} . لدينا $z=16\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$z^{2002}=16^{2002}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\times2002+i\sin\frac{5\pi}{6}\times2002\right)$$

$$=16^{2002}\left[\cos\left(1668\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(1668\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=16^{2002}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=16^{2002}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

جـ - تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z^n\in\mathbb{R}$.

. $z^n=16^n\left(\cos\frac{5\pi}{6}\times n+i\sin\frac{5\pi}{6}\times n\right)$

$z^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\sin\frac{5\pi}{6}\times n=0$ ومنه : $\frac{5\pi}{6}\times n=K\pi$

ومنه : $5n=6K$ حيث : $K\in\mathbb{N}$.

و بتطبيق نظرية غوص نجد : $n=6h$ ، $(h\in\mathbb{N})$.

2) أ – حساب L^2 .

$$L^2=\left[\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i\right]^2=-8\sqrt{3}+8i=z$$

ومنه L هو جذر تربيعي للعدد المركب z .

ب – استنتاج قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

لنعين أولا الجذور التربيعية للعدد المركب z على الشكل المثلثي .

إذا كان $\alpha=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ جذرا تربيعيا للعدد المركب z

فإن $\alpha^2=z$.

ومنه : $\alpha^2 = z$

ومنه : $r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 16\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

ومنه: ($r^2 = 16$ و $2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$)

($K \in \{0;1\}$ مع $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ و $r = 4$)

ومنه : $\alpha_0 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ،

$\alpha_1 = 4\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

بما أن $(\mathrm{Re})L > 0$ و $(\mathrm{Im})L > 0$ فإن $L = \alpha_0$ ومنه

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

ومنه : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3) التحقق من أن $z = -8\left(\sqrt{3} - i\right)$ هو جذر للمعادلة :

لدينا $z^2 + 2\left(\sqrt{3} - 2i\right)z - 16\left(7 - 5\sqrt{3}i\right) = 0$ ومنه :

$$64\left(\sqrt{3} - i\right)^2 - 16\left(\sqrt{3} - 2i\right)\left(\sqrt{3} - i\right) - 16\left(7 - 5\sqrt{3}i\right)$$

$$= 64\left(2 - 2\sqrt{3}i\right) - 16\left(1 - 3\sqrt{3}i\right) - 16\left(7 - 5\sqrt{3}i\right)$$

$$= (128 - 16 - 112) + i\left(-128\sqrt{3} + 48\sqrt{3} + 80\sqrt{3}\right) = 0$$

إذن $z = -8\left(\sqrt{3} - i\right)$ هو جذر للمعادلة .

نعلم أن مجموع جذري معادلة من الدرجة الثانية $az^2 + bz + c = 0$ يساوي $-\frac{b}{a}$. ومنه فإن

$z' + z = -2\left(\sqrt{3} - 2i\right)$ ومنه :

$z' - 8\left(\sqrt{3} - 0i\right) = -2\left(\sqrt{3} - 2i\right)$ فيكون $z' = 6\sqrt{3} - 4i$.

تمرين37

نعتبر كثير الحدود التالي:

$$P(z) = z^3 + (8 - 10i)z^2 - (20 + 48i)z - 64 + 8i$$

1) برهن أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعينه.

2) أ - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

نرمز بـ z_0 ، z_1 ، z_2 لحلول المعادلة حيث $|z_2| > |z_1|$.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط M_0 ، M_1 ، M_2 ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 .

ب - برهن على وجود تشابه S الذي يحول M_0 إلى M_1 و يحول M_1 إلى M_2 .

جـ - عين العناصر المميزة للتشابه S .

د - أكتب العبارة التحليلية للتشابه S .

الحـــل

1)البرهان على أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0

ليكن $z_0 = iy$ حلا للمعادلة $P(z)=0$ ومنه : $P(iy)=0$

$P(iy)=0$ ومنه :

$-8y^2+48y-64+\left(-y^3+10y^2-20y+8\right)i=0$ ومنه

$$\begin{cases} -8y^2+48y-64=0 & \text{....}(1) \\ -y^3+10y^2-20y+8=0 & \text{...}(2) \end{cases}$$

المعادلة (1) تقبل حلين $y_1=2$ (مقبول) و $y_2=4$

(مرفوض لأنه لا يحقق المعادلة (2)) ومنه $z_0=2i$.

2) أ - حل المعادلة $P(z)=0$.

$$P(z)=(z-2i)\left(z^2+az+c\right)$$
$$=z^3+(a-2i)z^2+(c-2ai)z-2ci$$

بالمطابقة نجد : $a=8-8i$ ، $c=-4-32i$.

$P(z)=0$ يكافئ $(z-2i)\left[z^2+(8-8i)z-4-32i\right]=0$

يكافئ ($z=2i$ أو $z^2+(8-8i)z-4-32i=0$) .

$\Delta'=(4-4i)^2-(-4-32i)=4$ ومنه :

$z_1=-(4-4i)+2=-2+4i$ ،

$z_2=-(4-4i)-2=-6+4i$.

إذن حلول المعادلة هي :

$z_0=2i$ ، $z_1=-2+4i$ ، $z_2=-6+4i$.

ب - البرهان على وجود تشابه S الذي يحول M_0 إلى M_1 و يحول M_1 إلى M_2 .

نعلم أن عبارة التشابه S هي $z'=\alpha z+\beta$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{C}^2$ و $|\alpha|\neq 1$.

لدينا :

$$\begin{cases} S(M_0)=M_1 \\ S(M_1)=M_2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z_1=\alpha z_0+\beta & \text{....}(1) \\ z_2=\alpha z_1+\beta & \text{....}(2) \end{cases}$$

$z_2-z_1=\alpha(z_1-z_0)$ ومنه $\alpha=\dfrac{z_2-z_1}{z_1-z_0}=1+i$

و بالتعويض نجد : $\beta=z_1-\alpha z_0=2i$.

إذن يوجد تشابه S معرف بـ $z'=(1+i)z+2i$ يحول النقطة M_0 إلى M_1 و يحول M_1 إلى M_2 .

جـ - العناصر المميزة للتشابه S .

عناصر المميزة للتشابه S هي النسبة و تساوي $|1+i|=\sqrt{2}$

و الزاوية وهي $\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$ و المركز وهو النقطة الصامدة

ذات اللاحقة $\dfrac{2i}{1-(1+i)}=-2$.

د ـ العبارة التحليلية للتشابه S .

لدينا $z'=(1+i)z+2i$ ومنه :

$$x' + iy' = (1+i)(x+iy)+2i = x - y + i(x+y+2)$$

ومنه : $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$ وهي العبارة التحليلية للتشابه S .

تمرين38

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-(1+i)z^2-2(1+i)z+8=0$

علما أنها تقبل حلا حقيقيا z_0 . نرمز بـ z_0 ، z_1 ، z_2 لحلول المعادلة حيث $|z_1|<|z_2|$.

2) أ- احسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2004}$.

ب- عين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_1^n \in \mathbb{R}_-^*$.

3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 .

أ – عين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب – عين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث :

$MA^2+MB^2+MC^2=K \ ,(K\in\mathbb{R})$.

الحـــل

1) أ - البرهان على أن المعادلة تقبل جذرا حقيقيا z_0 .

ليكن $z_0 = x$ حلا للمعادلة ومنه :

$x^3-(1+i)x^2-2(1+i)x+8=0$ ومنه :

$(x^3-x^2-2x+8)+i(-x^2-2x)=0$ ومنه :

$\begin{cases} x^3-x^2-2x+8=0 & ....(1) \\ -x^2-2x=0 & ....(2) \end{cases}$ المعادلة (2) تقبل حلين

$x_1=0$ (مرفوض) و $x_2=-2$ مقبول لأنه يحقق المعادلة (1) .

ومنه : $z_0=-2$.

ب – حل المعادلة :

$$(z+2)(z^2+az+c)=z^3+(a+2)z^2+(c+2a)z+2c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a+2=-1-i \\ c+2a=-2(1+i) \\ 2c=8 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=-3-i \\ c=4 \end{cases}$

$P(z)=0$ ومنه : $(z+2)[z^2-(3+i)z+4]=0$

$z=-2$ أو $z^2-(3+i)z+4=0$

المعادلة الثانية من الدرجة الثانية مميزها

$$\Delta=(3+i)^2-16=-8+6i$$

و الجذور التربيعية للعدد Δ هي :

$\alpha_1=1+3i$ و $\alpha_2=-1-3i$

ومنه : $z_1=\frac{(3+i)-(1+3i)}{2}=1-i$ ،

$z_2=\frac{(3+i)+(1+3i)}{2}=2(1+i)$.

2) أ – حساب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2004}$

، $z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$

. $z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2000}+\left(\frac{z_2}{2\sqrt{2}}\right)^{2000}=\cos\frac{-\pi}{4}\times 2000+i\sin\frac{-\pi}{4}\times 2000$$

$$+\cos\frac{\pi}{4}\times 2004+i\sin\frac{\pi}{4}\times 2004$$

$$(\cos 500\pi-i\sin 500\pi)+(\cos 501\pi+i\sin 501\pi)$$

$$(1-0)+(-1+0)=0$$

ب – تعيين العدد الطبيعي n لكي يكون $z_1^n\in\mathbb{R}_-^*$.

. $z_1^n=\sqrt{2}^n\left[\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right]$

$z_1^n\in\mathbb{R}_-^*$ يكافئ $\begin{cases}-\sin\frac{n\pi}{4}=0\\ \cos\frac{n\pi}{4}<0\end{cases}$ ومنه $\frac{n\pi}{4}=(2K+1)\pi$

ومنه : $n=4(1+2K)=8K+4$ حيث $(K\in\mathbb{N})$

3) أ – تعيين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$Z_G=\frac{z_0+z_1+z_2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$$

ب- تعيين مجموعة النقط

$M(z) : MA^2+MB^2+MC^2=K$

نعلم أن :

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

$GA^2=|z_0-z_G|^2=\frac{50}{9}$ ، $GB^2=|z_1-z_G|^2=\frac{20}{9}$ ،

. $GC^2=|z_2-z_G|^2=\frac{50}{9}$

إذن $3MG^2=K-\frac{40}{3}$ ومنه : $MG^2=\frac{1}{3}\left(K-\frac{40}{3}\right)$.

إذا كان $K>\frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G

و نصف قطرها $R=\sqrt{\frac{1}{3}\left(K-\frac{40}{3}\right)}$.

إذا كان $K<\frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

إذا كان $K=\frac{40}{3}$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة G .

تمرين39

ليكن كثيرالحدود $P(z)=z^3+z^2+(-5+4i)z-21-12i$

1- أ) برهن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .   ب) حل المعادلة $P(z)=0$.

ولتكن z_0 ، z_1 ، z_2 جذورها حيث $|z_1|<|z_2|$.

2) نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2.

أ) عين طبيعة المثلث ABC .

ب) عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث.

جـ) عين مجموعة النقط $M(z)$ حيث :

$$|z-z_0|^2+|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=\frac{267}{9}$$

3) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى C .

الحـــل

1) البرهان على أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 .

إذا كان $z_0=x$ جذرا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $P(x)=0$

$P(x)=0$ يكافئ $x^3+x^2+(-5+4i)x-21-12i=0$

ومنه : $(x^3+x^2-5x-21)+i(4x-2)=0$ ومنه :

$$\begin{cases}x^3+x^2-5x-21=0\\4x-12=0\end{cases}$$

ومنه : $x=3$ أي $z_0=3$

ب) حل المعادلة $P(z)=0$

$$P(z)=(z-3)(z^2+Az+C)$$
$$=z^3+(A-3)z^2+(C-3A)z-3C$$

بالمطابقة نجد :
$$\begin{cases}A-3=1\\C-3A=-5+4i\\-3C=-21-12i\end{cases}$$

ومنه : $A=4$ ، $C=7+4i$

$P(z)=0$ يكافئ $(z-3)(z^2+4z+7+4i)=0$

ومنه : $z=3$ أو $z^2+4z+7+4i=0$.

المعادلة الثانية من الدرجة الثانية مميزها

$$\Delta'=4-7-4i=-3+4i$$

إذا كان $\alpha=x+iy$ جذرا تربيعيا للعدد المركب Δ' فإن $\alpha^2=\Delta'$

ومنه:

$\alpha^2=\Delta'$ يكافئ
$$\begin{cases}x^2-y^2=-3 & ....(1)\\x^2+y^2=5 & ....(2)\\xy=2 & ....(3)\end{cases}$$

ومنه : $\alpha_1=1+2i$ ، $\alpha_2=-1-2i$. ومنه حلول المعادلة هي: $z_0=3$ ، $z_1=-2+(1+2i)=-1+2i$ ، $z_2=-2-(1+2i)=-3-2i$.

2 – أ) طبيعة المثلث ABC

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \text{ : ومنه } Z_{\overrightarrow{AB}} = z_1 - z_0 = -4+2i$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} \text{ : ومنه } Z_{\overrightarrow{BC}} = z_2 - z_1 = -2-4i$$

$BC=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}$ ، $AB=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(-4)(-2)+(+2)(-4)=0$

ومنه فالمثلث ABC قائم الزاوية في B ومتساوي الساقين .

ب) تعيين لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$z_G=\frac{z_0+z_1+z_2}{3}=\frac{3+(-1+2i)+(-3-2i)}{3}=-\frac{1}{3}$$

جـ) تعيين مجموعة النقط $M(z)$.

$|z-z_0|^2+|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=\frac{267}{9}$: ومنه

$MA^2+MB^2+MC^2=\frac{267}{9}$: ومنه

$$3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2=\frac{267}{9}$$

حيث : $GA^2=\left|z_0+\frac{1}{3}\right|^2=\frac{100}{9}$ ، $GB^2=\left|z_1+\frac{1}{3}\right|^2=\frac{40}{9}$ ،

$GC^2=\left|z_2+\frac{1}{3}\right|^2=\frac{100}{9}$: ومنه

$3MG^2+\frac{100}{9}+\frac{40}{9}+\frac{100}{9}=\frac{267}{9}$ يكافئ $MG^2=1$

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة (C) التي مركزها G ونصف قطرها 1.

3) تعيين العناصر المميزة للتشابه S .

نعلم أن عبارة التشابه S هي $z'=\alpha z+\beta$. ولدينا

$S(A)=A$ و $S(B)=C$ ومنه $z_0=\alpha z_0+\beta$

و $z_2=\alpha z_1+\beta$ فتكون : $z_2-z_0=\alpha(z_1-z_0)$

ومنه : $\alpha=\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}=1+i$ ،

$$\beta=z_0-\alpha z_0=3-3(1+i)=-3i$$

ومنه: $z'=(1+i)z-3i$.

فالتحويل S هو تشابه نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته هي :

$\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ومركزه A .

تمرين40

نعتبر كثير الحدود $P(z)=z^4+17z^2-28z+260$ حيث z عدد مركب .

1) عين العدد ين الحقيقيين A و B بحيث:

$$P(z)=(z^2+Az+B)(z^2+4z+20)$$

2) حل في م المعادلة $P(z)=0$.

3- أ) أنشئ في معلم متعامد ومتجانس النقاط:
N ، H ، C ، K ذات اللواحق على الترتيب :
$-2+4i$ ، $-2-4i$ ، $2+3i$ ، $2-3i$.

ب) عين العدد المركب z الذي يحقق $\dfrac{z-z_C}{z-z_N}=i$ ، ثم أنشئ النقطة M صورة z .

4- أ) فسر هندسيا $\left|\dfrac{z-z_C}{z-z_N}\right|$ و عمدة $\left(\dfrac{z-z_C}{z-z_N}\right)$.

ب) ما طبيعة المثلث NCM ؟ جـ) عين لاحقة D رابع رأس المربع $NMCD$.

الحل

1) تعيين العدد ين الحقيقيين A و B .

$$P(z)=\left(z^2+Az+B\right)\left(z^2+4z+20\right)$$
$$=z^4+(4+A)z^3+(20+4A+B)z^2+$$
$$(20A+4B)z+20B=z^4+17z^2-28z+260$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}4+A=0\\20+4A+B=17\\20A+4B=-28\\20B=260\end{cases}$ ومنه :

$B=13$ ، $A=-4$

2) حل للمعادلة $P(z)=0$.

$P(z)=0$ يكافئ $\left(z^2-4z+13\right)\left(z^2+4z+20\right)=0$

$z^2+4z+20=0$ أو $z^2-4z+13=0$

$\underline{z^2-4z+13=0}$ ، $\Delta'=2^2-13=-9=(3i)^2$

ومنه : $z_1=2-3i$ ، $z_2=2+3i$.

$\underline{z^2+4z+20=0}$ ، $\Delta'=2^2-20=-16=16i^2$

ومنه : $z_3=-2-4i$ ، $z_4=-2+4i$.

تعيين العدد المركب الذي يحقق $\frac{z-z_C}{z-z_N}=i$

$\frac{z-z_C}{z-z_N}=i$ ومنه : $i\left(z-z_N\right)=z-z_C$ ومنه :

$z\left(1-i\right)=z_C-iz$ و منه : $z=\frac{z_C-iz_N}{1-i}$

إذن $z=\frac{2+3i-i\left(-2+4i\right)}{1-i}=\frac{6+5i}{1-i}=\frac{1}{2}+\frac{11}{2}i$

ومنه $M\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right)$.

4) التفسير الهندسي للنتيجة $\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|$ وعمدة $\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)$.

$$\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|=\frac{\left|z-z_C\right|}{\left|z-z_N\right|}=\frac{MC}{MN}$$

$$\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)=\arg\left(z-z_C\right)-\arg\left(z-z_N\right)$$

$$=\left(\vec{i},\overrightarrow{MC}\right)-\left(\vec{i},\overrightarrow{MN}\right)=\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}\right)$$

$\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|$ تمثل $\frac{MC}{MN}$

عمدة $\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)$ تمثل الزاوية $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}\right)$

ب) طبيعة المثلث NCM .

$\frac{MC}{MN}=\left|\frac{z-z_C}{z-z_N}\right|=\left|i\right|=1$ ومنه : $MN=MC$

الزاوية $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}\right)$ هي عمدة $\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)$

$$\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_N}\right)=\arg\left(i\right)=\frac{\pi}{2}$$

إذن المثلث NCM قائم الزاوية في M ومتساوي الساقين .

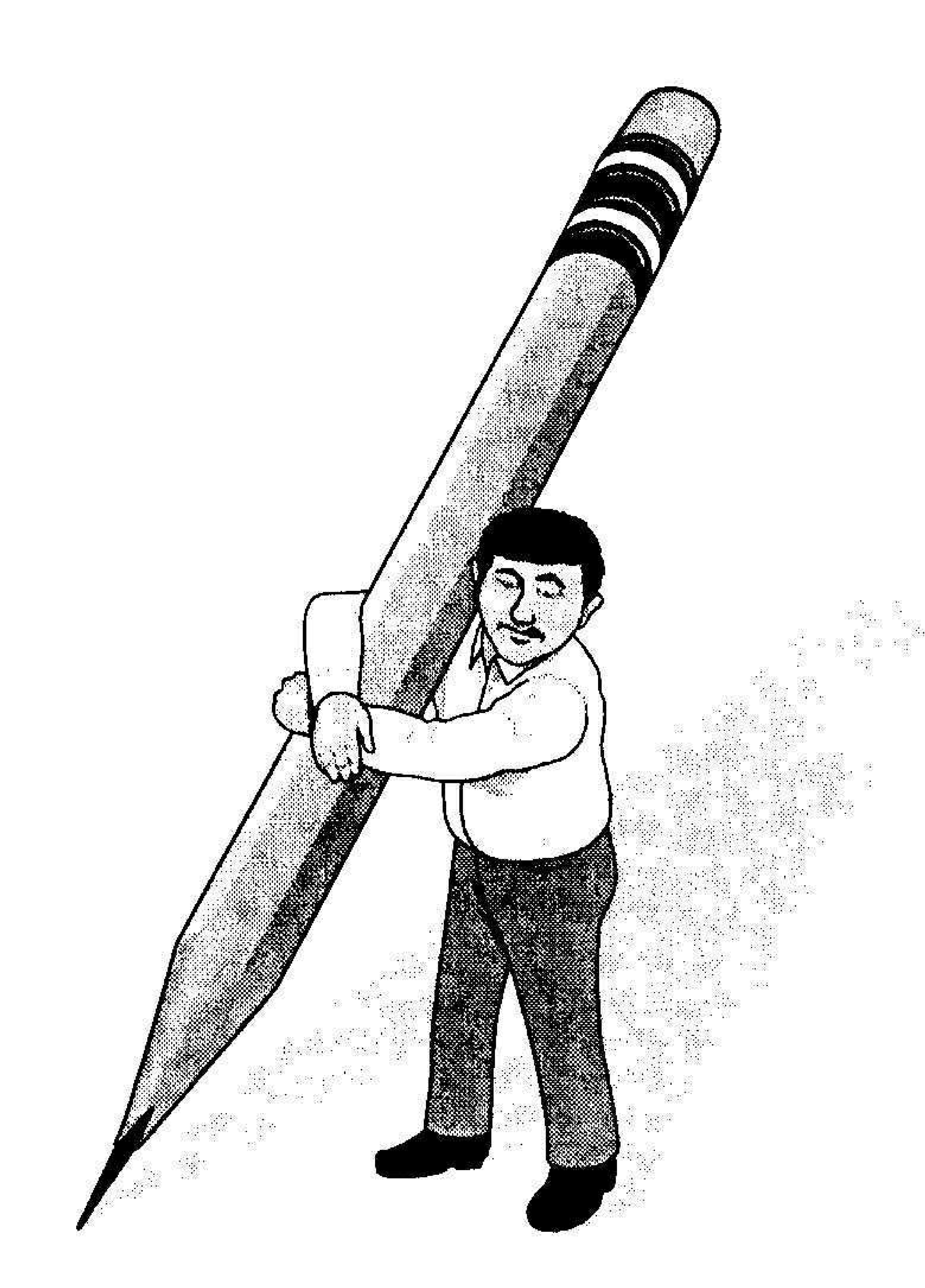
ج) تعيين لاحقة D الرأس الرابع للمربع $NMCD$.

$NMCD$ مربع معناه $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CD}$ يكافئ $Z_{\overrightarrow{MN}}=Z_{\overrightarrow{CD}}$

ومنه : $\left(-2+4i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{11}{2}i\right)=z_D-2-3i$ ومنه :

$\frac{-5}{2}-\frac{3}{2}i=z_D-2-3i$ ومنه : $Z_D=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

إذن لاحقة D هي $Z_D=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}i$.



تمارين مرفقة بالنتائج

تمرين01

$\alpha = -\sqrt{3} + i$

1) أكتب α على الشكل المثلثي. 2) أ – أكتب z عل الشكلين المثلثي و الجبري حيث : $\alpha . z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

ب – استنتج قيمة $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3)المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ،
A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $-\sqrt{3}+i$ و $1-i$. عين لاحقة C حتى تكون النقطة O مركز ثقل المثلث ABC .

- **النتائج:** 1) $\alpha = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

2) أ - $z = \boxed{1-i}$. ب- $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ، $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. 3) $z_C = \sqrt{3} - 1$

تمرين02

نعتبر الدوران R المعرف في المجموعة $\mathbb{C}$ بـ: $z' = \alpha z + \beta$

حيث : $|\beta|=1$. نضع $L=\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha.\beta}$.

1) عين $\overline{L}$ ثم استنتج أن L حقيقيا .

2) عين α و β علما أن صورتا النقطتين $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ، $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ هما $A'\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ، $B'(0;1)$ على الترتيب ، ثم

عين العناصر المميزة للدوران R .

- النتائج: 1) $\overline{L}=\frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{1+\overline{\alpha}.\overline{\beta}}$. بما أن $L=\overline{L}$ فإن L حقيقيا.

2) $\alpha=i$ و $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، العناصر المميزة للدوران R هي:

الزاوية $\frac{\pi}{2}$ والمركز النقطة ذات اللاحقة

$$\frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right]$$

تمرين03

1)احسب $(1+4i)^2$. 2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$z^2-(3+2i)z+5+i=0$ نسمي z_1 و z_2 حلي المعادلة حيث : $|z_2|>|z_1|$. 3)أ- أكتب z_1 على الشكل المثلثي .

ب - احسب $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2002}$.

4) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب z_1 ، z_2 ، $(1+i)$ ، $(3-i)$. أ ـبرهن على وجود تشابه S مركزه C و يحول النقطة A إلى النقطة D .

- النتائج:

1) $(1+4i)^2=-15+8i$. 2) $z_1=1-i$ ، $z_2=2+3i$.

3) أ- $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$.

ب- $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2002}=-i$.

4) أ-العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'=(1+i)z+1-i$.

ب- العناصر المميزة للتشابه هي : النسبة $\sqrt{2}$ ، الزاوية $\frac{\pi}{4}$ ،

المركز هو النقطة C ذات اللاحقة $(1+i)$.

تمرين04

1)أكتب على الشكل المثلثي جذور المعادلة

* ... $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$. - تحقق أن $z_0=\sqrt{2}(1+i)$ هو حل للمعادلة * . 2) أكتب الجذور التكعيبية على الشكل الجبري للعدد 1 ، ثم استنتج الشكل الجبري لحلول المعادلة * .

3) استنتج قيمة $\cos\frac{11\pi}{12}$ ، $\sin\frac{11\pi}{12}$

- **النتائج:**

1) حلول المعادلة * هي :

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) ،$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) ،$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) .$$

2) الجذور التكعيبية للعدد 1 هي: 1 ، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

وتكون جذور المعادلة* على الشكل الجبري هي:

$$z_0 = \sqrt{2}(1+i) ، z_1 = -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}i$$

$$، z_2 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}i .$$

3) $$\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}+(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} .$$

تمرين05

نعتبر كثير الحدود :

$$P(z) = z^4 - 8(1+i)z^3 + 48iz^2 + 64(1-i)z - 80$$

1) أ - برهن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 و جذرا تخيليا z_1 يطلب تعيينهما .

ب- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$P(z) = (z-z_0)(z-z_1)(z^2+\alpha z+\beta)$$

2)حل المعادلة $P(z)=0$. 3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبر النقاط : $A(2;0)$ ، $B(0;2)$ ، $C(2;4)$ ، $D(4;2)$. R هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

- تحقق أن $R(D)=B$. 3)- عين لاحقة C' صورة النقطة C بالدوران R .

- **النتائج:**

1) أ- $z_0 = 2$ ، $z_1 = 2i$. ب - $\alpha = -(6+6i)$ ، $\beta = 20i$

2) حلول المعادلة هي : $z_0 = 2$ ، $z_1 = 2i$ ، $z_3 = 2+4i$ ، $z_4 = 4+2i$. 3) $Z_{C'} = -2$.

تمرين06

α عدد مركب طويلته r و عمدته θ حيث $\theta \in]0;\pi[$.

1) أنشر $\left[1+i\left(1-\alpha^2\right)\right]^2$. 2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$z^2-\left[1+i\left(\alpha^2+1\right)\right]z+\alpha^2\left(-1+i\right)=0$ ، نرمز بـ z_1 إلى الجذر المستقل عن α و z_2 للجذر الآخر.

3) أ- عين العدد الطبيعي n حتى يكون z^n حقيقي موجب .

ب- حدد r و θ حتى يكون z_1 و z_2 مترافقان.

- **النتائج:**

1) $-\alpha^4+2\alpha^2+2i\left(1-\alpha^2\right)$ .2) $z_1=1+i$ ، $z_2=\alpha^2 i$.

3)أ- $n=8K\ \left(K\in\mathbb{N}\right)$. ب - $r=\sqrt[4]{2}$ ، $\theta=\frac{5\pi}{8}$.

تمرين07

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z .

$z^3-2\left(1+i\sqrt{3}\right)z^2+4\left(-1+i\sqrt{3}\right)z+8=0$ ...*

1)بين أن المعادلة * تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل المعادلة * ، يرمز لحلول المعادلة * بـ z_0 ، z_1 ، z_2 حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه الحقيقي سالب . 3) أ- أكتب حلول المعادلة * على الشكل المثلثي . ب- احسب z_1^2 ، z_1^3 .

جـ- أثبت أنه : $\forall n\in\mathbb{N}$ فإن $z_1^{3n+2}=-2^{3n+1}.z_2$.

د- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون z_2^n عدد حقيقي .

- **النتائج:**

1) $z_0=2$. 2) $z_0=2$ ، $z_1=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_2=1+i\sqrt{3}$.

3) أ- $z_0=2\left(\cos 0+i\sin 0\right)$ ،

$z_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ، $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

ب- $z_1^2=-2-2\sqrt{3}i$ ، $z_1^3=8$.

جـ - $z_1^{3n+2}=z_1^{3n}\times z_1^2=-2^{3n+1}.z_2$.

د- $n=3K\ ,\left(K\in\mathbb{N}\right)$.

تمرين08

نعتبر التطبيق المعرف في $\mathbb{C}-\{2\}$ بـ : $f\left(z\right)=\frac{3iz+1-3i}{z-2}$.

1) أ- برهن بأن f هو تقابل من $\mathbb{C}-\{2\}$ على مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ يطلب تعيينها . ب- أكتب عبارة f^{-1} .

2) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M\left(z\right)$ النقطة $M'\left(z'\right)$ حيث $z'=f\left(z\right)$.

3) عين مجموعة النقاط الصامدة للتحويل T.

4) عين مجموعة النقاط $M\left(z\right)$ بحيث $\left|f\left(z\right)\right|=1$.

- **النتائج:**

1) أ- f هو تقابل من $\mathbb{C}-\{2\}$ نحو $\mathbb{C}-\{3i\}$.

ب - $f^{-1}\left(z\right)=\frac{2z+1-3i}{z-3i}$.

2) التحويل T له نقطتان صامدتان لاحقتاهما:

$z_1=1+2i$ ، $z_2=1+i$

3) مجموعة النقاط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها $\varpi\left(\frac{7}{8};\frac{3}{8}\right)$

ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$.

<u>تمرين09</u>

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4(1+i)z+16i=0$.

2) استنتج حلول المعادلة (*) $z^4-4(1+i)z^2+16i=0$.

3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 صور حلول المعادلة (*) . بين أن هذه النقط تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

4) نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=\sqrt{2}(1+i)z+1-\sqrt{2}(1+i)$.

ما طبيعة التحويل S و ما هي عناصره المميزة؟

- **<u>النتائج:</u>**

1)حلول المعادلة هي: $z_1=4$ ، $z_2=4i$.

2)حلول المعادلة (*)هي: $z_1=2$ ، $z_2=-2$ ، $z_3=\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_4=-\sqrt{2}(1+i)$.

3) لدينا $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=2$ أي :

$OM_1=OM_2=OM_3=OM_4=2$ إذن النقاط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 تنتمي إلى نفس الدائرة مركزها O (مبدأ المعلم) و نصف قطرها 2.

4)التحويل S هو تشابه نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة 1 .

<u>تمرين10</u>

ليكن العددان المركبان $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ ، $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1) أكتب على الشكل المثلثي z_1 ، z_2 ، $\frac{z_1}{z_2}$ ، $(z_1.z_2)^6$:

2)في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس نعتبر الدوران R الذي مركزه $\varpi(1;0)$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$. أ- أكتب العبارة المركبة للدوران R . ب- لتكن النقطتان A و B ذات اللاحقتين على الترتيب z_1 و z_2 . عين لاحقتي $R(A)$ و $R(B)$.

- **<u>النتائج:</u>**

1) $z_1=\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ ، $z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

، $\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$ ،

$(z_1.z_2)^6=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

2) أ- $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

لاحقة النقطة $R(A)$ هي : $\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

ب- لاحقة $R(B)$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

تمرين11

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^3+(8-2i)z^2+(20-10i)z+12-16i=0 \quad .... (1)$$

1) تحقق أن $z_0=-1+i$ هو حل للمعادلة (1) .

2) استنتج الجذرين الآخرين z_1 و z_2 للمعادلة (1)
(الجزء التخيلي لـ z_1 موجب) .

3) في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_0 و z_1 و z_2 .

أ- عين لاحقة G مرجع الجملة: $\{(A;2),(B;-2),(C;1)\}$.

ب- عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث
$2MA^2-2MB^2+MC^2=56$.

- **النتائج:**

1) z_0 يحقق المعادلة(1) .2) الجذرين الآخرين للمعادلة (1)هما :
$z_1=-4+2i$ و $z_2=-3-i$.

3) أ- $z_G=3-3i$. ب- المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 10 .

تمرين12

ليكن $L=\frac{\alpha i-4\beta}{5+3i}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ .1) عين العددين الحقيقيين α و β علما أن $|L|=1$ و $ArgL\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

2) نفرض أن $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=\sqrt{2}$.أ- احسب $L^{12}+L^{16}$.

ب- برهن أنه مهما تكون الأعداد الطبيعية n (عدد زوجي) و m (عدد فردي) فإن : $L^{4n}+L^{4m}=0$.

- **النتائج:**

1) $\alpha=\beta=\sqrt{2}$.   2 - أ لدينا $L^4=-1$

$L^{12}+L^{16}=\left(L^4\right)^3+\left(L^4\right)^4=-1+1=0$.

ب) $L^{4n}=\left(L^4\right)^n=1$ و $L^{4m}=\left(L^4\right)^m=-1$

ومنه: $L^{4n}+L^{4m}=0$.

تمرين13

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ كثير الحدود :

$$P(z)=z^3+z^2+(-5+4i)z-21-12i$$

1)أ- برهن بأن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2) في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : 3 ، $-1-2i$ ، $-3+2i$.   عين التشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى C ثم أعط عناصره المميزة.

- **النتائج:**

1)أ- $z_0=3$. ب- حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $z_0=3$ ، $z_1=-1-2i$ ، $z_2=-3+2i$. 2) $z'=(1-i)z+3i$

العناصر الميزة للتشابه S هي : المركز : النقطة A ،

النسبة: $|1-i|=\sqrt{2}$ ، الزاوية : $-\frac{\pi}{4}$.

تمرين14

1) أكتب العدد المركب $u=\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$ على شكله الجبر ي

و المثلثي . 2) احسب u^4 .

3) عين الجذور من الرتبة الرابعة للعدد $L=2\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

- **النتائج:**

1) $u=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$ ،

$u=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

2) $u^4=2\left(1+i\sqrt{3}\right)$. الجذور من الرتبة الرابعة للعدد L هي:

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$ ، $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$ ، $-\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$.

تمرين15

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ كثير الحدود :

$$P(z)=z^3-2z^2-iz+3-i$$

1) أ- احسب $P(-1)$. ب- أوجد كثير الحدود $Q(z)$ بحيث: $P(z)=(z+1)\times Q(z)$. جـ- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$. 2) ليكن z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_2 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_3 الحل الثالث.

أ- أكتب كل من الأعداد : z_1-1 ، z_2 ، z_3 على الشكل المثلثي .

ب- تحقق أن $z_2(z_1-1)$ هو عدد حقيقي و أن $\frac{z_1-1}{z_2}$ هو عدد تخيليا صرفا. 3) لتكن M_1 و M_2 صورتي العددين z_1-1 و z_2 على التوالي في المستوي المركب .

أ- بين أن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين (O مبدأ المعلم)

ب-احسب قيس زاوية الدوران الذي مركزه النقطة O و يحول M_1 إلى M_2 .

- **النتائج:**

1) أ- $P(-1)=0$. ب- $Q(z)=z^2-3z+3-i$.

جـ- حلول المعادلة $P(z)=0$ هي: $2+i$ ، $1-i$ ، -1 .

2) أ- $z_1-1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ،

$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ ،

$z_3 = \cos\pi + i\sin\pi$.

ب- $(z_1-1)z_2 = 2$ ، $\frac{z_1-1}{z_2} = i$.

3) أ- $OM_1 = |z_1-1| = \sqrt{2}$ ، $OM_2 = \sqrt{2}$ فالمثلث OM_1M_2 متساوي الساقين .

ب- زاوية الدوران الذي مركزه النقطة O و يحول M_2 إلى M_1 هي $\frac{\pi}{2}$.

تمرين16

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)......\ z^2-2i\bar{z}=0$ نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . 2) ليكن z_1 ، z_2 ، z_3 حلول المعادلة (E) غير المعدومة . أ) - أنشئ في المستوي المركب النقط $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ و $M_3(z_3)$ و أثبت أن المثلث $M_1M_2M_3$ متقايس الأضلاع.

3) ليكن f تطبيق بحيث: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

و $f(z)=\left(-\sqrt{3}+i\right)z+i$

أ- حدد طبيعة و عناصر التطبيق f . ب- لتكن z_1' ، z_2' ، z_3' صور z_1 ، z_2 ، z_3 على التوالي بـ f . بين أن النقط $M_1'(z_1')$ و $M_2'(z_2')$ و $M_3'(z_3')$ تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

- **النتائج:**

1) حلول المعادلة (E) هي: 0 ، $-2i$ ، $\sqrt{3}+i$ ، $-\sqrt{3}+i$.

2) ب- $M_2M_3 = M_1M_3 = M_1M_2 = 2\sqrt{3}$

فالمثلث $M_1M_2M_3$ متقايس الأضلاع.

3) التطبيق f هو تشابه مباشر مركزه النقطة ω لاحقتها $\frac{i}{1+\sqrt{3}-i}$ و نسبته 2 و زاويته $\frac{5\pi}{6}$.

تمرين17

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ كثير الحدود :

$$P(z) = z^4-2z^3+6z^2-8z+8$$

1)تحقق أن $z_0 = 2i$ هو حل للمعادلة $(E): P(z)=0$.

2) أ- بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $\bar{z}$ يكون حلا أيضا للمعادلة (E) . ب- استنتج حل آخر للمعادلة (E) .

3) عين عددين مركبين a و b بحيث:

$$P(z) = \left(z^2+4\right)\left(z^2+az+b\right)$$

4) حل المعادلة (E) و أكتب الحلول على الشكل المثلثي .

5) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ نعتبر النقط $A\left(z_0\right)$ و $B\left(z_1\right)$ و $C\left(z_1-2\right)$ مع $z_0=2i$ و $z_1=1+i$. ليكن R الدوران بحيث $R\left(O\right)=C$ و $R\left(A\right)=B$. حدد عناصر الدوران R .

- **النتائج:**

1)نجد : $P\left(2i\right)=0$. 2)أ- z حل للمعادلة $\left(E\right)$ يعني $P\left(z\right)=0$ ومنه : $\overline{P\left(z\right)}=0$ أي أن :

$\bar{z}^4-2\bar{z}^3+6\bar{z}^2-8\bar{z}+8=0$ ومنه : $P\left(\bar{z}\right)=0$

إذن $\bar{z}$ حل للمعادلة $\left(E\right)$.

ب- بما أن $z=2i$ حل للمعادلة $\left(E\right)$ فإن $\bar{z}=-2i$ حل لـ $\left(E\right)$

3) $a=-2$ و $b=2$. 4) حلول المعادلة $P\left(z\right)=0$ هي: $1+i$ ، $1-i$ ، $-2i$ ، $2i$.

الكتابة على الشكل المثلثي :

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ ،}$$

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \text{ ،}$$

$$-2i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ ،}$$

$$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) .$$

5) عبارة الدوران R هي: $z'=-iz-1+i$. مركز الدوران R هو النقطة التي لاحقتها i و زاوية الدوران R هي $\frac{3\pi}{2}$.

تمرين18

أكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين المركبين

$$a=\frac{1}{2}\left(1+i\right) \quad \text{،} \quad b=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

2)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(E\right)$: $z^2+\left(-1+2i\right)z-i=0$.

3) ليكن z_1 ، z_2 جذري المعادلة $\left(E\right)$ بحيث تخيلي z_1 أصغر من تخيلي z_2 .

أ- بين أن $a.z_1=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)b$.

ب – استنتج كتابة z_1 على الشكل المثلثي .

جـ - أكتب $z_1.z_2$ على الشكل المثلثي ثم استنتج كتابة z_2 على المثلثي . 4) ليكن في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ التشابه S الذي يربط كل نقطة $M\left(z\right)$ بالنقطة $M'\left(z'\right)$ ، حيث $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$.

حدد عناصر التشابه S.

- **النتائج:**

1) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ،

$b=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

2) $z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}+2}{2}i$ ، $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}i$.

3) ب- $z_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ ،

جـ- $z_1.z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ،

$z_2=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right]$.

4) عناصر التشابه : مركز التشابه S هو مبدأ المعلم O ، نسبة التشابه هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته هي $\frac{\pi}{4}$.

تمرين19

1) احسب طويلة و عمدة العدد المركب $\alpha=6-6i\sqrt{3}$ واستنتج الجذرين التربيعيين للعدد α .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$2z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+2\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$ ، نرمز إلى الجذر الحقيقي بـ b و الجذر الآخر بـ a . 3) نعتبر التحويل T الذي

يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' بحيث $z'=az+b$. (a و b هما العددان من السؤال 2)

3) حدد طبيعة و عناصر التحويل T .

- **النتائج:**

1) $\alpha=12\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$. الجذرين التربيعيين للعدد α هما : $-3+i\sqrt{3}$ ، $3-i\sqrt{3}$.

2) $a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ، $b=2$.

3) $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2$ ، التحويل T هو دوران لأن : $\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ ، زاويته $\frac{\pi}{3}$ و مركزه النقطة ذات اللاحقة $1+i\sqrt{3}$

تمرين20

في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب $z_A=3\left(1+i\sqrt{3}\right)$ ، $z_B=\frac{1}{2}\left(9+5i\sqrt{3}\right)$ ، $z_C=\frac{3}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

1) عين لاحقة G مرجع الجملة : $\{(A;-1),(B;+1),(C;+1)\}$.

2) عين لواحق النقط A' ، B' ، C' صور النقط A ، B ، C على الترتيب بالدوران الذي مركزه G وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

3) بين أن المثلث ABC قائم .

- **النتائج:**

1) $z_G = 3+i\sqrt{3}$. 2) الدوران معرف بـ

$z' = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+6$ ، $z_{A'}=0$ ، $z_{B'}=i\sqrt{3}$ ، $z_{C'}=3$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ فالمثلث ABC قائم في A .

تمرين21

L عدد مركب حيث : $L=\frac{z+2i}{z-i}$. 1) أكتب على الشكل $L=\alpha+i\beta$. 2) عين مجموعة النقط $M(x;y)$ ذات اللاحقة z التي من أجلها : أ – يكون L حقيقيا سالبا تماما .

ب – تكون عمدة L تساوي $\frac{\pi}{2}$. جـ - $|L|=1$.

- **النتائج:**

1) $L = \frac{x^2+y^2+y-2}{x^2+(y-1)^2} + \frac{3x}{x^2+(y-1)^2} i$.

2) أ – مجموعة النقط M المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(0;1)$ و $B(0;-2)$ باستثناء A و B .

ب – مجموعة النقط M هي القوس $\overset{\frown}{AB}$ حيث $A(0;1)$ و $B(0;-2)$ و تقع في الربع الأول و الرابع. جـ - مجموعة النقط M المطلوبة هي المستقيم ذو المعادلة : $y=-\frac{1}{2}$.

تمرين22

1) عين العدد الحقيقي x بحيث $(x-i)^2=3-4i$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $iz^2-3iz+1+3i$.

- **النتائج:**

1) $x=2$. 2) حلا المعادلة هما : $z_1=1-i$ و $z_2=2+i$.

تمرين23

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

$$z^3-(3+i)z^2+(6+2i)z-4(1+i)=0$$

1) عين العدد الحقيقي a حتى يكون $z_1=a(1+i)$ حل للمعادلة .

2) حل المعادلة (E) .

3) أكتب الجذور الثلاثة للمعادلة (E) على الشكل المثلثي .

- **النتائج:**

1) $a=1$. 2) حلول المعادلة (E) هي:

$z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$ ، $z_3=1+i\sqrt{3}$.

3) $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ،

$z_2=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ ،

$z_3=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

تمرين24

ليكن العددان المركبان $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ ، $z_2=1-i$.

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . 2) استنتج طويلة وعمدة العدد المركب $z=\frac{z_1}{z_2}$. 3) احسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

- **النتائج:**

1) $z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

و $z_2=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

2) $|z|=1$ ، $\arg z\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

3) $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

تمرين25

نعتبر الدالة :

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
$$z\mapsto\frac{z+\bar{z}-i}{z-i\times\bar{z}}$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=i$. 3) عين مجموعة النقط $M(x;y)$ التي لاحقتها z حتى يكون $f(z)$ تخيليا صرفا.

- **النتائج:**

1) f معرفة إذا كان $z=x+iy$ و $x\neq y$.

2) حلول المعادلة $f(z)=i$ هي : $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

3) مجموعة النقط M المطلوبة هو المستقيم (D) ذو المعادلة $x=-\frac{1}{2}$ باستثناء النقطة $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

تمرين26

1) احسب طويلة وعمدة العدد المركب $\alpha=\frac{1+i}{i\sqrt{3}+1}$.

2) استنتج جذور المعادلة $z^3=\alpha$.

3) عين العدد الطبيعي n لكي يكون $\alpha^n\in\mathbb{R}$.

- **النتائج:**

1) $$|\alpha| = \frac{|1+i|}{\left|i\sqrt{3}+1\right|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(\alpha) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}[2\pi] = -\frac{\pi}{12}[2\pi]$$

2) جذور المعادلة $z^3 = \alpha$.

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{36}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{36}\right)\right] \text{ ،}$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}\right) \text{ ،}$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}\right) .$$

3) n من مضاعفات 12 .

تمرين27

عين ثلاثة أعداد مركبة A ، B ، C علما أن :

A ، B ، C حدود متتابعة من متتالية حسابية

و $A+B+C=3i$ و $A \times B \times C = 2-i$.

- **النتائج:**

$A = 1+2i$ و $B = i$ و $C = -1$

أو $A = -1$ و $B = i$ و $C = 1+2i$.

تمرين28

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^4 = 1$.

2) استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $\left[\left(\sqrt{3}-i\right)z+i\right]^4 = 1$

3) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = \left(\sqrt{3}-i\right)z+i$.

ما طبيعة التحويل T وما هي عناصره المميزة ؟

- **النتائج:**

1) $z_0 = 1$ ، $z_1 = -1$ ، $z_2 = i$ ، $z_3 = -i$.

2) حلول المعادلة هي :

$\frac{-\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$ ، $\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{-\sqrt{3}+1}{4}i$ ، 0 ، $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3) التحويل T هو تشابه نسبته 2 وزاويته هي:

$\arg\left(\sqrt{3}-i\right) = -\frac{\pi}{6}$ ومركزه النقطة ω هـ ذات اللاحقة

$$\frac{i}{1-\left(\sqrt{3}-i\right)} .$$

تمرين29

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2i = 0$.

2) نعتبر المتتالية الهندسية المعرفة بـ : $V_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

و $V_4=-\sqrt{3}+i$. - عين أساس هذه المتتالية .

3) نعتبر المتتالية الهندسية التي أساسها جزؤه الحقيقي موجب .

أحسب V_{19} وعين طويلته وعمدته .

- **النتائج:**

1) $z=-1-i$ أو $z=1+i$.

2) $q=-1-i$ أو $q=1+i$.

3) $$V_{19}=V_0\times q^{19}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\times(1+i)^{19}$$

ومنه : $|V_{19}|=2^8\sqrt{2}$ ، $\arg(V_{19})\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi]$.

تمرين30

z_1 و z_2 عددان مركبان حيث : $z_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^4$ ، $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) احسب طويلة وعمدة كل من z_1 و z_2 .

2) عين الشكل الجبري و المثلثي للعدد المركب $z=\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج

قيمة $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

3) عين قيم العدد n حتى يكون $z^n\in\mathbb{R}$.

- **النتائج:**

1) $|z_1|=1$ ، $\arg z_1\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$|z_2|=1$ ، $\arg z_2\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) $z=\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}$ ،

$$z=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3) n من مضاعفات 12 .

تمارين مقترحة للحل

تمرين01

نعتبر العدد المركب $\alpha = \frac{z+4i}{z-4i}$ حيث $z = x+iy$.

1) أكتب α على الشكل الجبري .2) أ – عين E_1 مجموعة النقط $M(z)$ حيث $Arg\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. ب – عين E_2 مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون α حقيقيا سالبا تماما .

تمرين02

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (I) ذات المجهول z .

$$z^2 - \left(\sqrt{3}+1+2i\right)z + \left(\sqrt{3}-1\right) + i\left(\sqrt{3}+1\right) = 0 \quad .. \ (I)$$

1) أ – احسب $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I). نسمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة حيث $|z_1|>|z_2|$. ب- أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ثم استنتج كتابة العدد المركب $z_1.z_2$ على الشكل المثلثي . جـ - استنتج قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

2) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_1\cdot z_2}{2\sqrt{2}}\right)$ عددا حقيقيا .

تمرين03

ليكن $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث: $r \in \mathbb{R}^*_+$ و $\theta \in [0;2\pi]$.

1) احسب z^2 و $(1+i)\times\bar{z}$ بدلالة r و θ .($\bar{z}$ مرافق z) .

2)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = (1+i)\bar{z}$.

تمرين04

1) أوجد الجذور من الرتبة الرابعة للعدد 1 .

2) أ – أنشر و بسط : $(z-1)(z^3+z^2+z+1)$.

ب – حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3+z^2+z+1=0$.

3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-2i)^4 = -4$ ..(*)

أ- تحقق أن $(1+i)$ هوحل للمعادلة (*).ب– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*)

تمرين05

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة(*)

$2(1+i)z^2 + 2(\lambda+i)z + i\lambda(1-i) = 0$ حيث λ عدد مركب طويلته r و عمدته θ .

2) حدد r و θ لكي يكون z_1 و z_2 متعاكسان(نرمز بـ z_1 إلى الجذر المستقل عن λ و z_2 الجذر الآخر).

3) نفرض أن : $\lambda = 1-i$ و A ، B ، M هي صور الأعداد المركبة z_1 و z_2 و z على الترتيب .- عين مجموعة النقط $M(z)$ حتى يكون المثلث AMB قائم في B .

تمرين06

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

$z' = (1+i\sqrt{3})^n .z - 2$. 1) إذا كان $n = 1$. ما طبيعة التحويل T و ما هي عناصره المميزة ؟ 2) عين العدد الطبيعي n حتى يكون التحويل T تحاكي.

تمرين07

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $i^5 = 1$ ، تعطى الحلول على الشكل المثلثي .

2) برهن أن مجموع الحلول يساوي 0 .

3) استنتج أن : $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

4) عبر عن $\cos\frac{4\pi}{5}$ بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$ ثم احسب $\cos\frac{4\pi}{5}$ و $\cos\frac{2\pi}{5}$.

تمرين08

باستعمال دستور موافر احسب :

$\cos 4x$ و $\sin 4x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

تمرين09

ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعرف في $\mathbb{C}$ بـ:

$P(z) = az^3 + bz^2 + cz$ حيث : a ، b ، c أعداد مركبة .

1) عين a ، b ، c علما أن : $P(1) = -2+i$ و $P(i) = -1-2i$

2) a ، b ، c تأخذ القيم التي وجدت في السؤال السابق .

3. حل المعادلة $P(z) = 0$ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط A ، B ، O ذات اللواحق على الترتيب $-1+i$ ، 2 ، 0 . عين لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AOBC$ متوازي الأضلاع.

تمرين10

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-(4+3i\sqrt{3})z+4+6i\sqrt{3}$ .... (*)

ليكن z_1 و z_2 حلا المعادلة (*) حيث $z_1 \in \mathbb{R}$. M_1 ، M_2 ، M_3 نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب z_1 ، z_2 ، $-7+6i\sqrt{3}$. 2) حدد عناصر التشابه المباشر بحيث $S(M_1) = M_2$ و $S(M_2) = M_3$. 3) عين لاحقة G مركز ثقل المثلث $M_1M_2M_3$.

تمرين11

نريد حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (e):

$$(e): z^4-(1+i\sqrt{5})z^3+(2+i\sqrt{5})z+1=0$$

1)أ- برهن أن z هو حل للمعادلة (e) إذا و فقط إذا كان : $\alpha = z+\frac{1}{z}$ هو حل للمعادلة (E) :

$$\alpha^2-(1+i\sqrt{5})\alpha+i\sqrt{5}=0$$

ب ـحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) واستنتج حلول المعادلة (e).

2)في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B ، C ، D التي لواحقها على الترتيب $z_A = \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)i$ ، $z_B = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)i$ ، $z_C = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_D = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. عين العبارة المركبة للتحاكي h بحيث: $h(A)=C$ ، $h(B)=D$.

تمرين12

يعطى العدد المركب α حيث: $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) احسب α^2 و α^4 . 2) أكتب α^4 على الشكل المثلثي ثم استنتج من ذلك طويلة α و عمدته. 2) نعتبر المستوي (π) المزود بمعلم متعامد و متجانس ، نرفق بكل نقطة $M(x;y)$ بلاحقتها z .عين مجموعة النقط M من (π) بحيث: $|\alpha z| = 8$.

تمرين13

1) أكتب على الشكل المثلثي العدد المركب $(-1-i)$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z = \frac{(-1-3i)z+3+i}{z-i}$.

نرمز بـ z_0 للحل الذي له أصغر طويلة . 3) أ- احسب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{1984}$ و أكتبه على الشكل الجبري. ب- ما هي قيم العدد الطبيعي n التي

من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا .

تمرين14

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ العدد المركب $f(z) = \frac{(4-6i)z+1+3i}{2z-1-i}$.

1) بوضع $z = x+iy$ أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=2z$. نرمز لحلي المعادلة بـ z' و z'' بحيث $|z'|>|z''|$. 3) أ – احسب طويلة و عمدة العدد المركب $z'-2iz''$. ب – أوجد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z'-2iz'')^n$ حقيقيا .

تمرين15

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(iz-1)\left[z^2-(1+4i)z-(5+i)\right]=0 \quad ....(E)$$

يرمز z_0 ، z_1 ، z_2 إلى حلول المعادلة (E) بحيث : $|z_0|<|z_1|<|z_2|$. 2) المستوي (π) مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقط A ، B ، C ، M من المستوي (π) التي لواحقها z_0 ، z_1 ، z_2 ، z على الترتيب .

أ - أوجد إحداثيي النقطة G مرجحا للنقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1،2،1 على الترتيب .

ب- احسب GA ، GB ، GC . جـ - عين مجموعة النقط M بحيث: $|z-z_0|^2+2|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=34$.

تمرين16

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(7+3i)z+10+10i=0$ نرمز لحلي المعادلة بـ : z_1 ، z_2 بحيث : $|z_1|<|z_2|$ .2)أ- احسب طويلة العدد المركب $(z_1\times z_2)$ و عمدته. ب –عين قيم n حتى يكون $(z_1\times z_2)^n$ عددا تخيليا صرفا مع $100<n<130$.

3) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

A ، B صورتا z_1 ، z_2 على الترتيب ، C النقطة التي إحداثيتاها $(0;2)$. – عين مركز ونسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي يحقق $S(A)=B$ و $S(C)=O$.

تمرين17

نعتبر العددين المركبين z_1 ، z_2 حيث:

$z_1=2+2i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . 2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقطتين A ، B اللتين لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 . الدوران R الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$ يحول النقطة A إلى النقطة C.

أ- برهن أن z_3 لاحقة C هي $z_3=-(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$

ب – برهن أن حاصل القسمة $\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$ هو عدد تخيلي صرف . - احسب طويلته و عمدة هذا الحاصل .- فسر هندسيا هذه الناتج مع تعيين طبيعة المثلث ABC .

تمرين18

ليكن f التطبيق من $\mathbb{C}-\{2i\}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بـ :

$f(z)=\frac{2z-i}{z-2i}$. 1) أ – حل المعادلة $f(z)=z$.

ب- أكتب حلول المعادلة z_1 و z_2 على الشكل الجبري و المثلثي .

جـ - احسب العدد $z_1^4+z_2^4$.

2) نرمز بـ $M(x;y)$ إلى صورة العدد المركب z في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. ليكن (Γ) مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ تخيليا صرفا . أوجد معادلة (Γ). 3) برهن أن طويلة z هي 1 إذا و فقط إذا كانت طويلة $f(z)$ هي 1.

تمرين19

حل في $\mathbb{C}^2$ الجملتين:

$$(1)\begin{cases} z_1^2+z_2^2=2 \\ z_1 . z_2=1 \end{cases} \quad ، \quad (2)\begin{cases} z_1+2z_2=i \\ z_1 . z_2=1 \end{cases}$$

تمرين20

نعتبر العدد المركب $z=1+\cos\theta-i\sin\theta$ حيث : $\theta\in[0;2\pi]$. 1) احسب بدلالة θ طويلة و عمدة العدد المركب z و $z'=\frac{1}{\bar{z}}$ ($\bar{z}$ هو مرافق z) .

تمرين21

ليكن كثير الحدود :

$$P(z)=z^4-8(1+i)z^3+48iz^2+64(1-i)z-80$$

1 – أ) برهن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل جذرا حقيقيا z_0 وجذرا تخيليا صرفا z_1 يطلب تعيينهما .

ب) عين العدد ين الحقيقيين a و b بحيث :

$$P(z)=(z-z_0)(z-z_1)(z^2+az+b)$$

2) حل المعادلة $P(z)=0$. 3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس نعتبرالنقط $A(2;0)$ ، $B(0;2)$ ، $C(2;4)$ ، $D(4;2)$.

R هو الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، عين عبارة الدوران R ثم تحقق أن $R(D)=B$.

تمرين22

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$$z^2-(1+\cos\theta)iz-(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)i=0....(*)$$

1 – أ) تحقق أن $z_0=1+i\cos\theta$ هو حل للمعادلة (*) .

- ب) استنتج الجذر الآخر z_1 .

2 – أ) احسب $(z_0+z_1)^4$.

– ب) عين العدد الطبيعي n لكي يكون $(z_0+z_1)^n\in\mathbb{R}$.

3) في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس ، نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

$z'=(\sin\theta+i\cos\theta)z+(1-\cos\theta)i$.

- ما طبيعة التحويل T ، وما هي عناصره المميزة .

تمرين23

باستعمال القانونين لأولار $(Euler)$:

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{و} \quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

أكتب على شكل عبارة خطية ما يلي :

1) $\sin^2 x.\cos^4 x$. 2) $\sin x.\cos^3 x$.

تمرين24

1) عين العددين الحقيقيين x و y حيث : $(x+iy)^2=8+6i$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $iz^2+(1-3i)z-(3-4i)=0$.

3- أ) برهن أن المعادلة :

$$iz^3+(1-5i)z^2-(5-10i)z+2(3-4i)=0 \;...(*)$$

تقبل حذرا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه . ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*)

نرمز بـ z_0 ، z_1 ، z_2 إلى حلول المعادلة (*) حيث :
حقيقي (z_2) أكبر من حقيقي (z_1).
المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقاط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب z_0 ، z_1 ، z_2 .
1)برهن أن المثلث OBC هو قائم الزاوية ومتساوي الساقين.
2)عين لاحقة D لكي يكون الرباعي $OBCD$ مربعا .

تمرين25

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(z+1-3i)\left[z^2+(-4+i)z+4-2i\right]=0 \ ...(*)$$

1) حل هذه المعادلة علما أنها تقبل حلا حقيقيا.
2)مثل في مستوي الأعداد المركبة النقاط A ، B ، C صور z_0 ، z_1 ، z_2 حلول المعادلة(*).
3) عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
4) عين مجموعة النقط $M(z)$ حيث:
$MA^2+MB^2+MC^2=K$ (ناقش حسب العدد الحقيقي K)

تمرين26

نعتبر العدد المركب $L=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

1) أ – احسب L^2 ، L^4 . ب –اكتب L^4 على الشكل المثلثي .
2) أ- استنتج طويلة و عمدة L . ب – عين $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.
3) عين العدد الطبيعي n لكي يكون L^n حقيقيا .

تمرين27

نعتبر العدد المركب $L=\frac{\bar{z}+2+i}{1-i\bar{z}}$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z.
1) اوجد العدد المركب z بحيث $L=1+i$.
2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس، لتكن النقطة M التي لاحقتها $z=x+iy$. أ) أكتب L على الشكل الجبري .
ب) عين المجموعة(γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث L يكون عددا حقيقيا.جـ) عين مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|L|=2$.

تمرين28

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المتتاليتين (S_n) و (L_n) المعرفتين بـ:
$S_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$S_{n+1}=(1+i\sqrt{3})S_n+3$ و $L_n=S_n-i\sqrt{3}$.

1) برهن أن المتتالية (L_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها q.
2) عبر عن L_n و S_n بدلالة n.
3) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=(1+i\sqrt{3})z+(1-i\sqrt{3})$$

ا) ما طبيعة التحويل T ؟ . ب) عين العناصر المميزة للتحويل T.

تمرين29

نعتبر الدالة f المعرفة ب :

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = \frac{z}{1+iz}$$

حيث: $z \in \mathbb{C} - \{i\}$.

1- أ) حل المعادلة $f(z) = \frac{1}{z}$ وليكن z' ، z'' جذري هذه المعادلة حيث $R(z') > 0$ و z'' الحلالآخر. ب) أكتب z' ، z'' على الشكل المثلثي . جـ) أحسب $(z')^6 + (z'')^6$.

2) أثبتأن $f(z)$ يكون تخيليا صرفا إذا وفقط إذا كان z تخيليا صرفا

تمرين30

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - (5+i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$

2- أ) أكتب الجذرين على الشكل المثلثي .

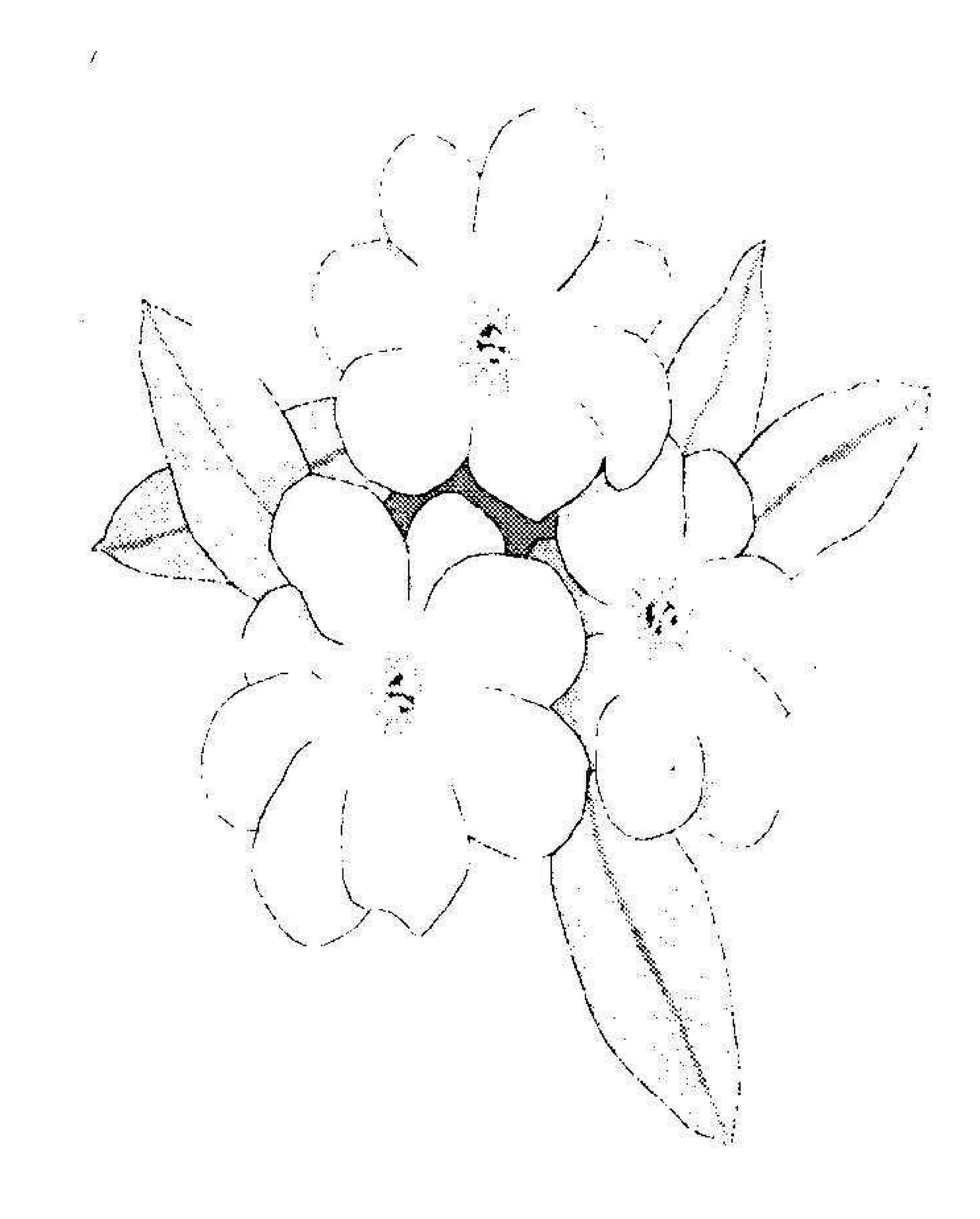
ب) استنتج حلول المعادلة .

$$z^4 - (5+i\sqrt{3})z^2 + 4 + 4i\sqrt{3} = 0 \quad ...... (*)$$

لتكن N_1 ، N_2 ، N_3 ، N_4 صور حلول المعادلة (*) في معلم متعامد ومتجانس .

3) ما طبيعة الرباعي $N_1N_4N_2N_3$ ؟

﴿ربّ اشرح لي صدري و يسّر لي أمري و أحلل عقدة من لساني يفقهوا قولي﴾



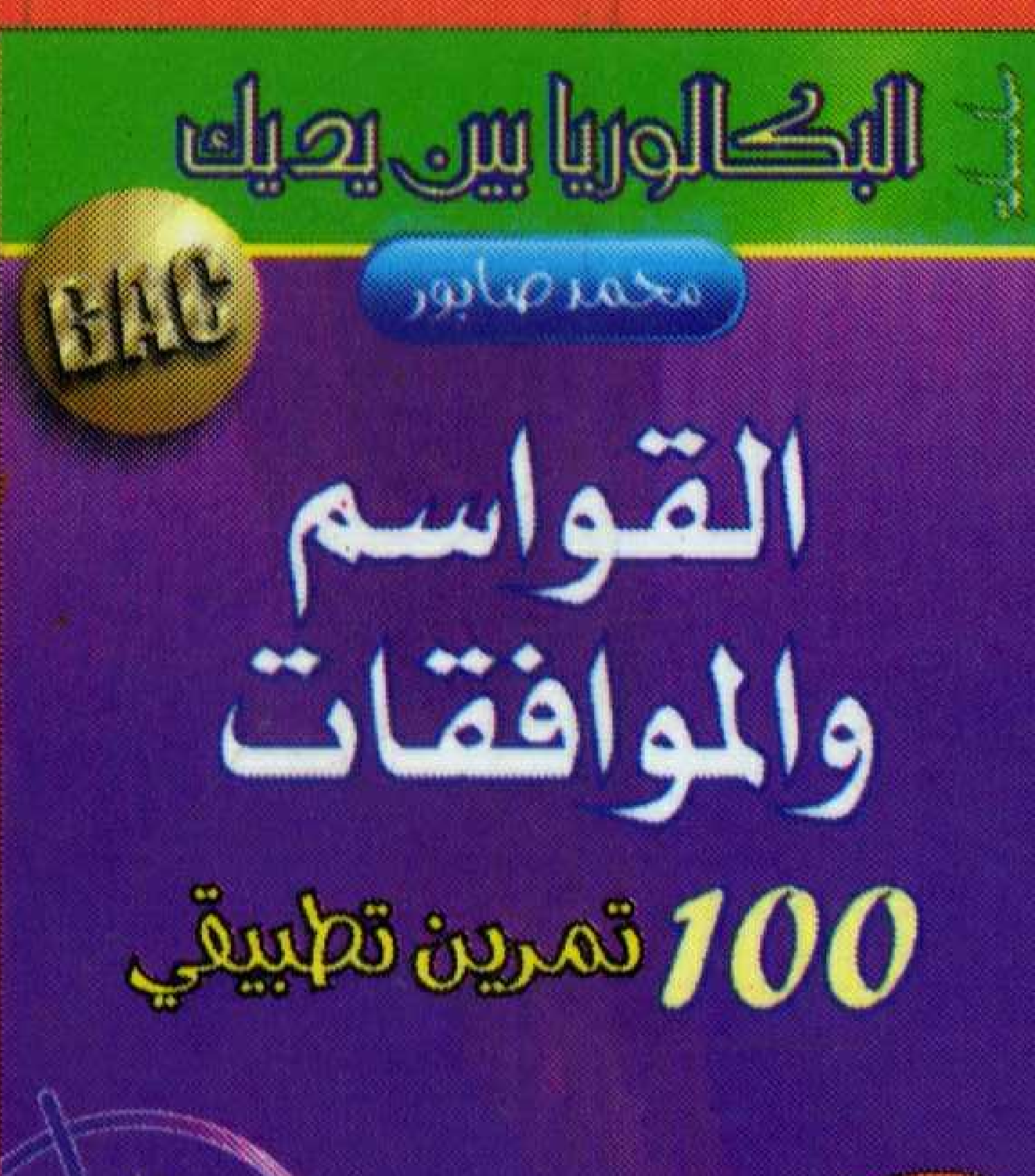
الفهرس

الرجاء الدُعاء لمُؤلِف الكتاب

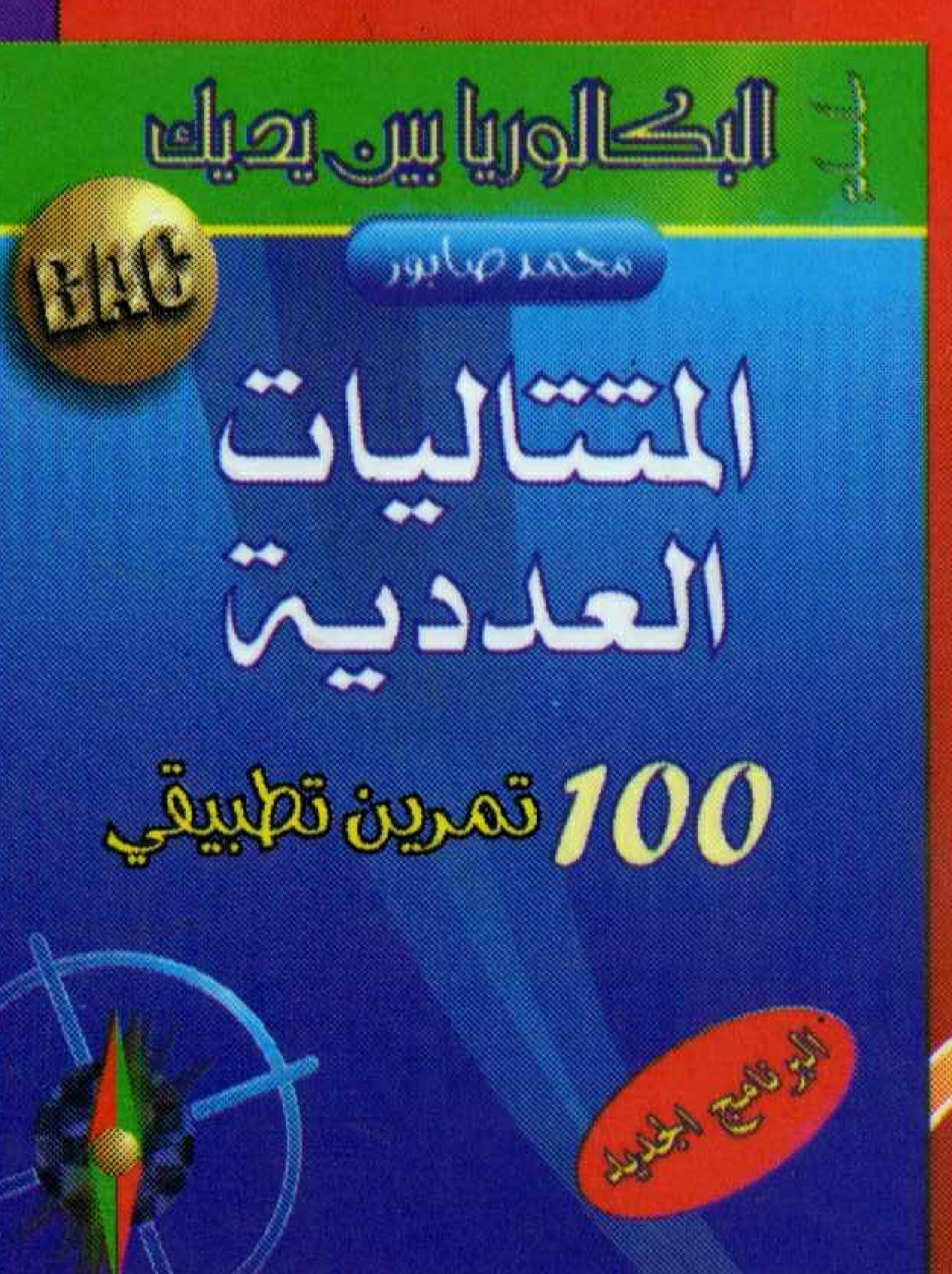
وَ الدُعاء للــوالِد الكريم - رحمه الله -

وفّق اللهُ الجميعَ

في نفس السلسلة







ISBN : 978-9947-0-1864-4